Formelsammlung

Grundrechenarten

Addition	**Subtraktion**
$a + b = c$	$a - b = c$
Summand + Summand = Summe	Minuend – Subtrahend = Differenz
Multiplikation	**Division**
$a \cdot b = c$	$a : b = c$
Faktor · Faktor = Produkt	Dividend : Divisor = Quotient

Wichtige Rechengesetze

Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)	**Assoziativgesetz** (Verbindungsgesetz)	**Distributivgesetz** (Verteilungsgesetz)
$a + b = b + a$	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \pm c) = ab \pm ac$
$a \cdot b = b \cdot a$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	$\frac{b \pm c}{a} = \frac{b}{a} \pm \frac{c}{a}$

Bruchrechnen

Erweitern	**Kürzen**	**Addition/Subtraktion**	**Multiplikation/Division**
$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$	$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$	$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c} \quad c \neq 0$	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad c, d \neq 0$

Rechnen mit Klammern

Auflösen von Plusklammern

$+(-a + b - c) = -a + b - c$

Die Rechenzeichen bleiben erhalten!

Auflösen von Minusklammern

$-(-a + b - c) = +a - b + c$

Die Rechenzeichen ändern sich!

Ausklammern

$ab + ac - ad = a(b + c - d)$

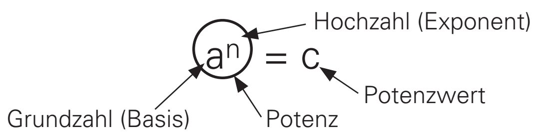
Ausmultiplizieren

$a(-b + c - d) = -ab + ac - ad$

Multiplizieren von Summen und Differenzen

$(a + b) \cdot (c - d) = ac - ad + bc - bd$

Potenzen/Wurzeln



$a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots \cdot a}_{\text{n Faktoren}}$

$a^n = c \Leftrightarrow \sqrt[n]{c} = a \qquad (c \geqq 0)$

Potenzieren und Radizieren sind entgegengesetzte Rechenarten.

Vereinfachte Schreibweise: $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$

$\sqrt[n]{0} = 0 \qquad (n \geqq 2)$

Zehnerpotenzen

$10^0 = 1$

$10^1 = 10$ $\qquad 10^{-1} = 0{,}1$ (1 Zehntel)

$10^3 = 1000$ (1 Tausend) $\qquad 10^{-2} = 0{,}01$ (1 Hundertstel)

$10^6 = 1\,000\,000$ (1 Million) $\qquad 10^{-3} = 0{,}001$ (1 Tausendstel)

Maßeinheiten

Längenmaße	Hohlmaße
1 km = 1000 m 1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm 1 dm = 10 cm = 100 mm 1 cm = 10 mm	1 hl = 100 l 1 l = 1000 ml 1 l = 1 dm^3 1ml = 1 cm^3
Flächenmaße	**Gewichtsmaße**
1 km^2 = 100 ha 1 ha = 100 a 1 a = 100 m^2 1m^2 = 100 dm^2 1 dm^2 = 100 cm^2 1 cm^2 = 100 mm^2	1 t = 1000 kg 1 kg = 1000 g 1 g = 1000 mg
Raummaße/Hohlmaße	**Zeitmaße**
1 m^3 = 1000 dm^3 1 dm^3 = 1000 cm^3 1 cm^3 = 1000 mm^3	1 Tag = 24 h 1 h = 60 min 1 min = 60 s

Runden

Die Stelle rechts von der Rundungsstelle ist entscheidend.
Ist die Ziffer der entscheidenden Stelle eine
- ▶ 0, 1, 2, 3 oder 4 wird abgerundet.
- ▶ 5, 6, 7, 8 oder 9 wird aufgerundet.

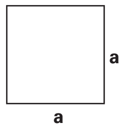
Erläuterungen für Abkürzungen

A: Flächeninhalt
A_G: Flächeninhalt der Grundfläche
V: Volumen
O: Oberflächeninhalt
M: Mantelflächeninhalt
e, f: Länge der Flächendiagonalen
d: Länge der Raumdiagonale
s: Länge der Mantellinie
h: Höhe
r: Radius
u: Umfang

Flächenberechnung

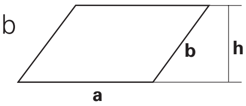
Quadrat

$A = a \cdot a$
$A = a^2$
$u = 4 \cdot a$



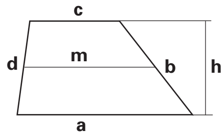
Parallelogramm

$A = a \cdot h$
$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$



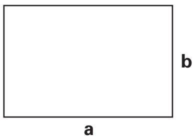
Trapez

$A = \frac{a + c}{2} \cdot h$
$A = m \cdot h$
$u = a + b + c + d$



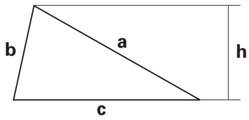
Rechteck

$A = a \cdot b$
$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$



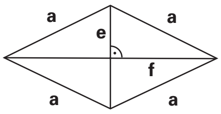
Dreieck

$A = \frac{c \cdot h_c}{2}$
$= \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{a \cdot h_a}{2}$
$u = a + b + c$



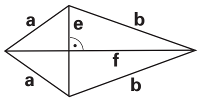
Raute

$A = \frac{e \cdot f}{2}$
$u = 4 \cdot a$



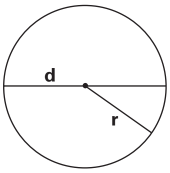
Drachen

$A = \frac{e \cdot f}{2}$
$u = 2 \cdot (a + b)$
$= 2a + 2b$



Kreis

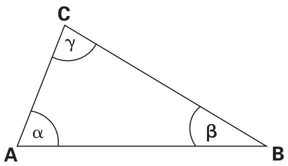
$A = \pi \cdot r^2$
$A = \frac{\pi}{4} \cdot d^2$
$u = 2 \cdot \pi \cdot r$
$u = \pi \cdot d$
$d = 2 \cdot r$



Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken

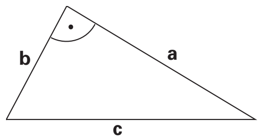
Winkel im Dreieck

Winkelsumme
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$



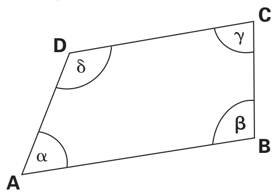
Satz des Pythagoras

$c^2 = a^2 + b^2$



Winkel im Viereck

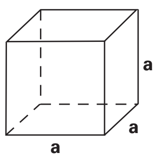
Winkelsumme
$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$



Körperberechnung

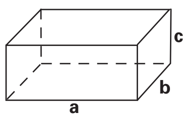
Würfel

$V = a \cdot a \cdot a$
$V = a^3$
$O = 6 \cdot a^2$



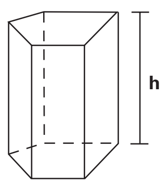
Quader

$V = a \cdot b \cdot c$
$O = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b \cdot c + 2 \cdot a \cdot c$



Säule (Prisma)

$V = A_G \cdot h$
$O = 2 \cdot A_G + M$



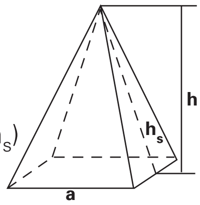
Pyramide

$V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$

$O = A_G + M$

$O = a \cdot (a + 2 \cdot h_s)$

$M = 2 \cdot a \cdot h_s$



Zylinder

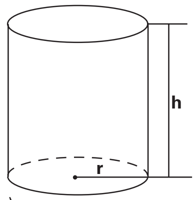
$V = A_G \cdot h$

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

$O = 2 \cdot A_G + M$

$O = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + h)$

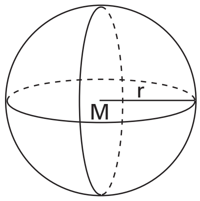
$M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$



Kugel

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

$O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$



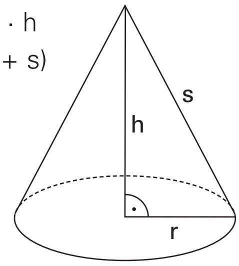
Gerader Kreiskegel

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$O = \pi \cdot r \cdot (r + s)$

$s = \sqrt{r^2 + h^2}$

$M = r \cdot \pi \cdot s$



Prozent- und Promillerechnung

G = Grundwert   W = Prozentwert / Promillewert   p = Prozentsatz / Promillesatz

Prozentrechnung

$p\ \% = \frac{p}{100}$

$G = \frac{W \cdot 100}{p}$ $W = \frac{G \cdot p}{100}$ $p = \frac{W \cdot 100}{G}$

Promillerechnung

$p‰ = \frac{p}{1000}$

$G = \frac{W \cdot 1000}{p}$ $W = \frac{G \cdot p}{1000}$ $p = \frac{W \cdot 1000}{G}$

Zinsrechnung

Jahreszinsen

$Z = \frac{K \cdot i \cdot p}{100}$

Monatszinsen

$Z = \frac{K \cdot m \cdot p}{100 \cdot 12}$

Tageszinsen

$Z = \frac{K \cdot t \cdot p}{100 \cdot 360}$

Kapital: K
Zinsen: Z
Zinssatz: p

Zeit: i (in Jahren)
m (in Monaten)
t (in Tagen)

Zinseszinsrechnung

K_n = Endkapital
K_0 = Anfangskapital
n = Anzahl Jahre
q = Zinsfaktor
p = Zinssatz (%)

$q = 1 + \frac{p}{100}$

$K_n = K_0 \cdot q^n$

$= K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen

$$\begin{array}{|l} a_1x + b_1y = c_1 \\ \wedge\ a_2x + b_2y = c_2 \\ \hline \end{array}$$

Lösung mit dem **Einsetz-, Gleichsetz-** oder **Additionsverfahren**

Quadratische Gleichungen

Allgemeine Form

$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$

Normalform

$\boxed{x^2 + px + q = 0}$

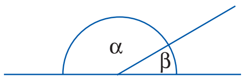
Lösungs-
formeln → $\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$

Diskriminante $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

$D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen
$D = 0 \Rightarrow$ eine Lösung
$D < 0 \Rightarrow$ keine Lösung

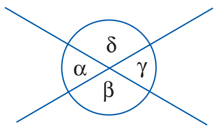
Winkel

Nebenwinkel



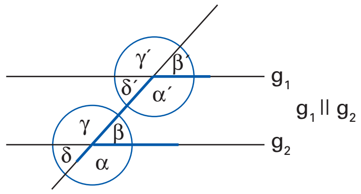
$\boxed{\alpha + \beta = 180°}$

Scheitelwinkel



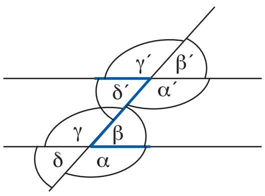
$\boxed{\alpha = \gamma,\ \beta = \delta}$

Stufenwinkel



$\alpha = \alpha' \quad \gamma = \gamma'$
$\beta = \beta' \quad \delta = \delta'$

Wechselwinkel



$\alpha = \gamma' \quad \gamma = \alpha'$
$\beta = \delta' \quad \delta = \beta'$

Strahlensätze

1. Strahlensatz

$$\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SC_1}} = \frac{\overline{SA_2}}{\overline{SC_2}}$$

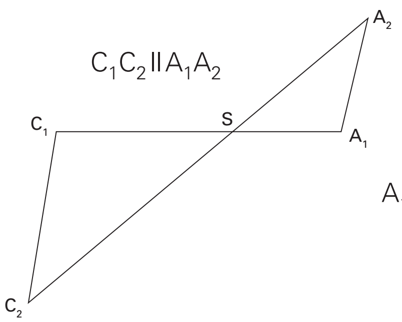
$$\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SB_1}} = \frac{\overline{SA_2}}{\overline{SB_2}}$$

2. Strahlensatz

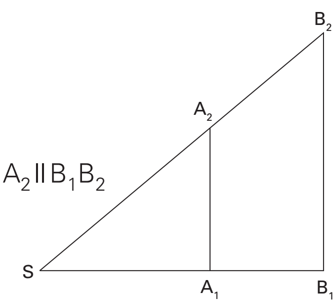
$$\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SC_1}} = \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{C_1C_2}}$$

$$\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SB_1}} = \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{B_1B_2}}$$

$C_1C_2 \parallel A_1A_2$

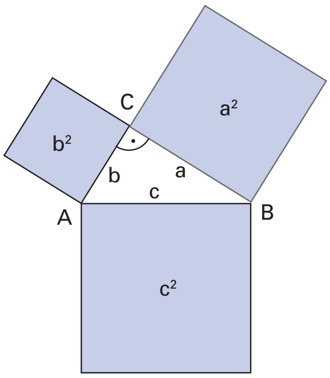


$A_1A_2 \parallel B_1B_2$



Flächensatz am rechtwinkligen Dreieck

Satz des Pythagoras

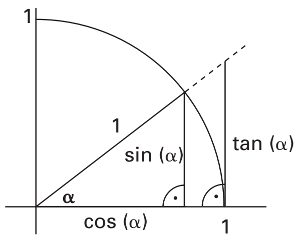


$a^2 + b^2 = c^2$ a, b: Katheten c: Hypotenuse

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der beiden Kathetenquadrate so groß wie das Hypotenusenquadrat.

Trigonometrie

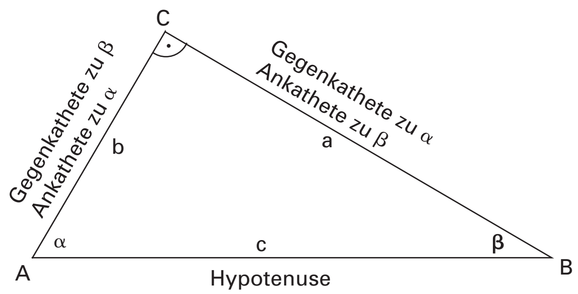
Winkelfunktionen am Einheitskreis



Besondere Werte

α	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
sin (α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}71$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}87$	1
cos (α)	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}87$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}71$	$\frac{1}{2}$	0
tan (α)	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}58$	1	$\sqrt{3} = 1{,}73$	nicht definiert

Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck

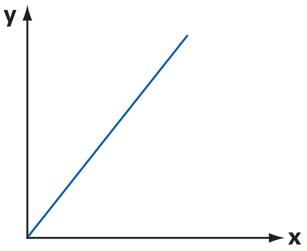
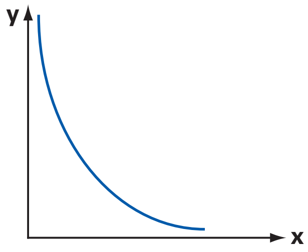


$\sin(\alpha) = \left(\frac{a}{c}\right) \Leftrightarrow \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \Leftrightarrow \sin(\beta) = \frac{b}{c}$

$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} \Leftrightarrow \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \Leftrightarrow \cos(\beta) = \frac{a}{c}$

$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \Leftrightarrow \tan(\beta) = \frac{b}{a}$

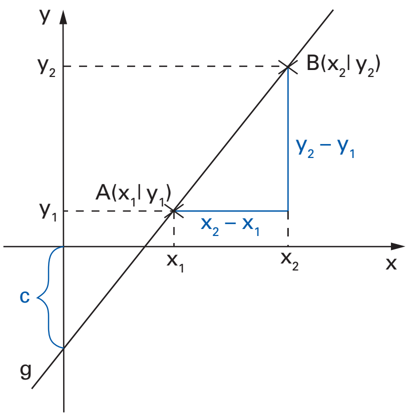
Zuordnungen

Direkte Proportionalität	Antiproportionalität
Die Quotienten einander zugeordneter Zahlen sind gleich: $\frac{y}{x} = k \qquad y \sim x \qquad (x, k \neq 0)$ (k Proportionalitätsfaktor)  Alle Punkte liegen auf einer Geraden durch den Ursprung.	Die Produkte einander zugeordneter Zahlen sind gleich: $x \cdot y = k \qquad y \sim \frac{1}{x} \qquad (x, k \neq 0)$ (k Proportionalitätsfaktor)  Alle Punkte liegen auf einer Kurve, die sich an die Koordinatenachsen anschmiegt.

Funktionen

Lineare Funktion (Gerade)

$g: y = mx + c \qquad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad c$ = y-Achsenabschnitt



Parallele und senkrechte Geraden

$g_1 \parallel g_2 \Rightarrow m_1 = m_2$

$g_1 \perp g_2 \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1}$
oder $m_1 \cdot m_2 = -1$

Quadratische Funktionen

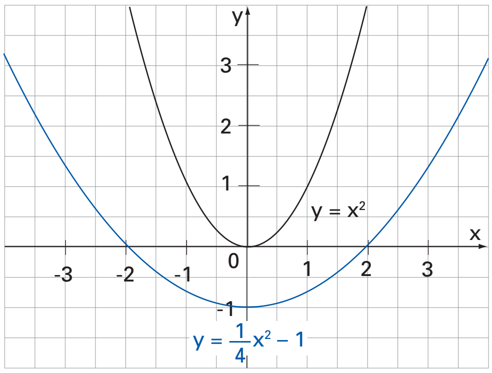
Quadratische Funktionen mit der Funktionsgleichung $y = ax^2 + c$

Der Summand c gibt die Verschiebung des Scheitelpunkts in y-Richtung an. Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten S (0 I c). **Der Faktor a** wirkt sich auf die **Form und die Öffnung** der Parabel aus. Er kann dabei eine Spiegelung und eine Streckung der Normalparabel bewirken.

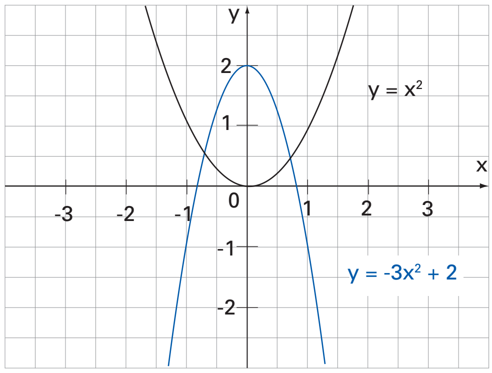
Für $a > 0$:	Parabel nach oben geöffnet
Für $0 < a < 1$:	breiter als Normalparabel
Für $a > 1$:	schmaler als Normalparabel

Für $a < 0$:	Parabel nach unten geöffnet
Für $-1 < a < 0$:	breiter als Normalparabel
Für $a < -1$:	schmaler als Normalparabel

Beispiel: Die Parabel $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ ist eine nach oben geöffnete Parabel. Sie ist breiter als die Normalparabel ($y = x^2$). Ihr Scheitelpunkt S (0 I -1) liegt unterhalb der x-Achse.

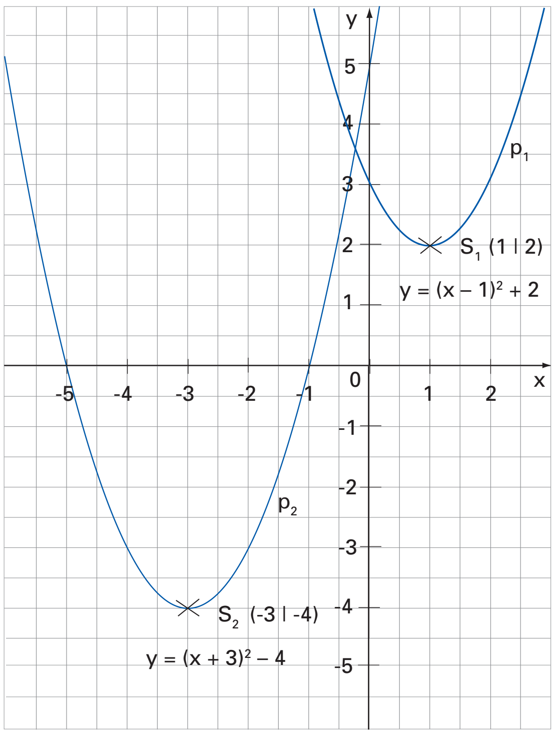


Beispiel: Die Parabel $y = -3x^2 + 2$ ist eine nach unten geöffnete Parabel. Sie ist schmaler als die Normalparabel ($y = x^2$). Ihr Scheitelpunkt S (0 I 2) liegt oberhalb der x-Achse.



Quadratische Funktionen mit der Funktionsgleichung $y = (x - d)^2 + e$

Diese quadratische Funktionsgleichung wird die **Scheitelform** genannt. Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten S (d I e). Der Graph ist eine verschobene Normalparabel, die symmetrisch zur Achse $x = d$ ist. Für die Verschiebungen gilt:
Der Wert **d** stellt die **Verschiebung in x-Richtung** dar.
Der Wert **e** stellt die **Verschiebung in y-Richtung** dar.



Das Schaubild zeigt die beiden Parabeln p_1: $y = (x - 1)^2 + 2$ und p_2: $y = (x + 3)^2 - 4$.
Die Parabel p_1 ist eine um 1 nach rechts und um 2 nach oben verschobene Normalparabel mit dem Scheitelpunkt S_1 (1 I 2).
Die Parabel p_2 ist eine um 3 nach links und um 4 nach unten verschobene Normalparabel mit dem Scheitelpunkt S_2 (-3 I -4).

Von der Normalform zur Scheitelform einer Parabelgleichung

Um die Normalform einer Parabelgleichung in die Scheitelform zu überführen, muss man das Verfahren der quadratischen Ergänzung anwenden.

Beispiel:
Gegeben ist eine Parabel p mit der Funktionsgleichung $y = x^2 - 10x + 3$
Umformung in Scheitelform mithilfe der quadratischen Ergänzung:
$y = x^2 - 10x + 3$
$y = x^2 - 10x + (5)^2 - (5)^2 + 3$
$y = (x - 5)^2 - 25 + 3$
$y = (x - 5)^2 - 22$
Der Scheitelpunkt von p ist S (5 I -22). Die Scheitelform der Parabelgleichung von p ist also:
p: $y = (x - 5)^2 - 22$

Beschreibende Statistik

Grundbegriffe

Urliste:	ungeordnete Sammlung von statistischen Daten
Rangliste:	der Größe nach geordnete Urliste
Strichliste:	Hilfsmittel, um die Häufigkeit des Auftretens bestimmter Ereignisse zu ermitteln

Kennwerte einer Liste mit n Werten $x_1, x_2, \dots, x_n$

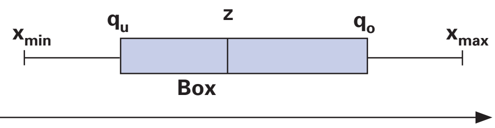
Minimum x_{min} (Min)	**Maximum x_{max} (Max)**
kleinster Wert der Datensammlung	größter Wert der Datensammlung
Spannweite d	**häufigster Wert m (Modalwert)**
Differenz zwischen größtem und kleinstem Wert der Sammlung $d = x_{max} - x_{min}$	Dies ist der am häufigsten auftretende Wert. Es kann mehrere geben.
Arithmetisches Mittel	**Median (Zentralwert)**
Mittelwert $\overline{x}$ der Datenreihe $x_1, \dots, x_n$ berechnet sich aus: $\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$	In einer der Größe nach geordneten Reihe mit n Daten hat der Median z die Eigenschaft, dass 50 % der Werte darüber und 50 % der Werte darunter liegen. $z = x_{\frac{n+1}{2}}$ für ungerades n $z = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right)$ für gerades n

Quartile

Quartile teilen eine Rangliste in vier Teile.
unteres Quartil q_u = 25 % aller Werte sind kleiner oder gleich q_u.
= Median der Werte der unteren Datenhälfte
Zentralwert z: siehe Median
oberes Quartil q_o = 75 % aller Werte sind kleiner oder gleich q_o.
= Median der Werte der oberen Datenhälfte
Quartilabstand q: Differenz zwischen oberem und unterem Quartil
$q = q_o - q_u$

Boxplot

Der Boxplot ist ein Diagramm, mit dem die Verteilung einer Datensammlung dargestellt wird.
Die Kennwerte x_{min}, x_{max}, q_u, q_o und z bestimmen den Boxplot. In der Box selbst liegen mindestens 50 % aller Daten.



Wahrscheinlichkeitsrechnung

Zufallsversuch

Vorgang, bei dem genau eines von mehreren möglichen Ergebnissen eintritt

Ereignis

Alle Ergebnisse eines Zufallsversuchs, die eine bestimmte Eigenschaft besitzen
Ein unmögliches Ereignis kann bei keinem Versuch auftreten.
Ein sicheres Ereignis tritt bei jedem Versuch auf.

Laplace-Versuch

Zufallsversuch, bei dem alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind (z. B. Münzwurf)
Die Wahrscheinlichkeit P für das Ereignis E berechnet sich aus:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

Gegenereignis

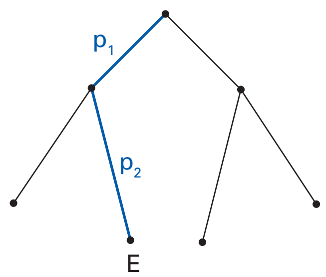
Alle Ergebnisse, die nicht günstig für E sind, ergeben das Gegenereignis $\overline{E}$.

$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

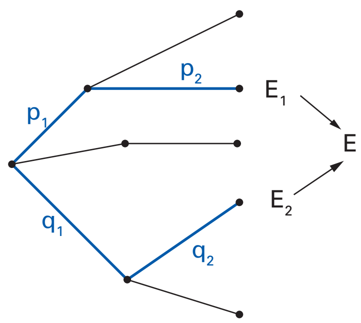
Mehrstufige Zufallsversuche

Solche Zufallsversuche lassen sich in einem Baumdiagramm darstellen. Dabei kann ein Ergebnis als Pfad veranschaulicht werden. Die Wahrscheinlichkeiten lassen sich mithilfe von Produkt- und Summenregel berechnen:

1. Pfadregel (Produktregel)
Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades ergibt sich aus dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades.
$P(E) = p_1 \cdot p_2$



2. Pfadregel (Summenregel)
Die Wahrscheinlichkeit eines zusammengesetzten Ereignisses ist gleich der Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten.
$P(E) = P(E_1) + P(E_2) = p_1 \cdot p_2 + q_1 \cdot q_2$



Erwartungswert

Um den Erwartungswert bei einem Glücksspiel zu berechnen, kann man folgendermaßen vorgehen:

1. Man schreibt alle möglichen Werte (W) der Gewinne und die jeweils zugehörigen Wahrscheinlichkeiten (P(W)) für diese Gewinne in einer geordneten Form auf. Eine mögliche geordnete Form des Aufschreibens ist zum Beispiel eine Tabelle, in die die Werte der Gewinne und ihre Wahrscheinlichkeiten eingetragen werden.
2. Man multipliziert jeden Gewinn-Wert (W) mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit (P(W)), addiert alle Einzelprodukte und subtrahiert den Einsatz des Glücksspiels. Das Ergebnis dieser Rechnung ist der Erwartungswert E:
   $E = P(W_1) \cdot W_1 + P(W_2) \cdot W_2 + P(W_3) \cdot W_3 + \ldots + P(W_n) \cdot W_n - \text{Spieleinsatz}$

Wenn der **Erwartungswert gleich Null** ist, dann handelt es sich bei dem Glücksspiel um ein **faires Spiel**.
Wenn der Erwartungswert negativ ist, dann erzielt der Betreiber / die Betreiberin des Spiels durchschnittlich Gewinn.
Wenn der Erwartungswert positiv ist, dann erzielt der Spieler / die Spielerin des Spiels durchschnittlich Gewinn.
Der durchschnittliche Gewinn entspricht in beiden Fällen dem Erwartungswert.