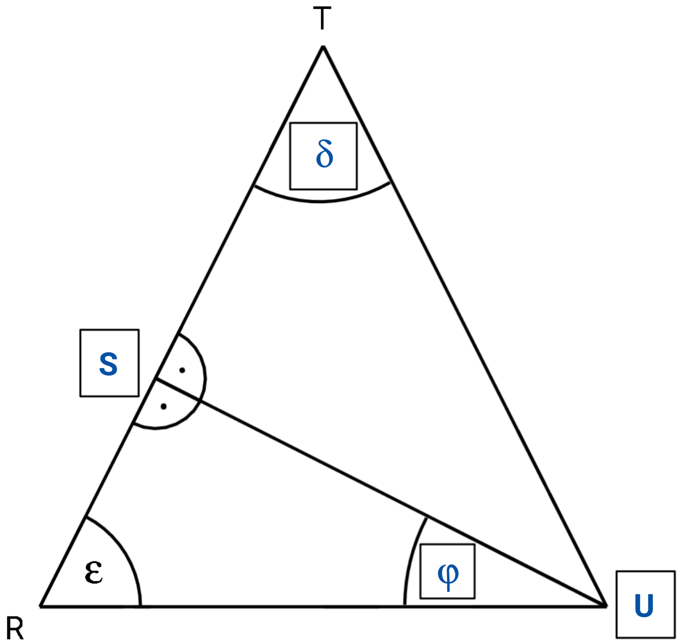
Teil A1 (Pflichtteil)

Aufgabe 1

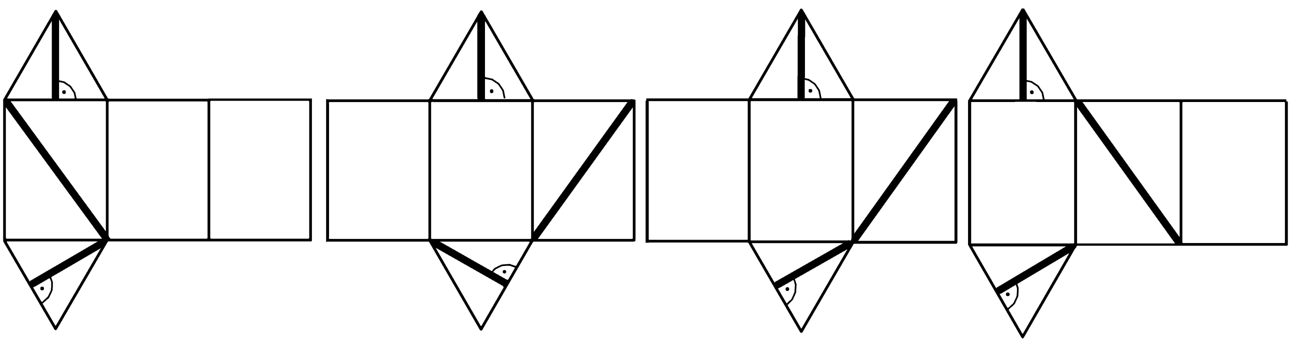


Aufgabe 2

a) Es gibt insgesamt 36 (= 6 · 6) Ergebnisse.
Das Ereignis „Augensumme ist ungerade“ umfasst folgende Ergebnisse:
(1;2), (1;4), (1;6), (2;1), (2;3), (2;5), (3;2), (3;4), (3;6), (4;1), (4;3), (4;5), (5;2), (5;4), (5;6), (6;1), (6;3), (6;5).
Dies sind insgesamt 18 Ergebnisse.
Damit gilt: P(„Augensumme ist ungerade“) $= \frac{18}{36} = \frac{1}{2} = 50\ \%$.
(Andere Lösungswege sind möglich.)

b) Das Ereignis „Augensumme ist kleiner als 4“ umfasst folgende Ergebnisse:
(1;1), (1;2), (2;1). Dies sind insgesamt 3 Ergebnisse.
Damit gilt: P(„Augensumme ist kleiner als 4“) $= \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \approx 8{,}3\ \%$.
(Andere Lösungswege sind möglich.)

Aufgabe 3



(A) ☐ (B) ☐ (C) ☒ X (D) ☐

Aufgabe 4

Nur Parabel p_3 schneidet die x-Achse zweimal. Ihr Scheitelpunkt $S_3\,(3\,|\,-3)$ liegt unterhalb der x-Achse.
Da die Parabel außerdem nach oben geöffnet ist, schneidet p_3 die x-Achse zweimal.

Der Scheitelpunkt der Parabel $p_1 = S_1\,(-3\,|\,0)$ liegt auf der x-Achse.
Damit berührt p_1 die x-Achse genau einmal, nämlich in diesem Scheitelpunkt S_1.

Der Scheitelpunkt der Parabel $p_2 = S_2\,(0\,|\,-3)$ liegt unterhalb der x-Achse.
Da die Parabel außerdem nach unten geöffnet ist (wegen des negativen Faktors $-\frac{1}{3}$ vor dem x^2), schneidet p_2 die x-Achse gar nicht.

Aufgabe 5

Statt des Quadratsymbols kann man ein x setzen, um die Rechnung durchzuführen.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{32}\cdot\sqrt{x}-\sqrt{25} &= 3 && |\ \text{vereinfachen}\\
\sqrt{32}\cdot\sqrt{x}-5 &= 3 && |\ +5\\
\sqrt{32}\cdot\sqrt{x} &= 8 && |\ \text{Wurzelgesetz } \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b} \text{ anwenden}\\
\sqrt{32x} &= 8 && |\ \text{quadrieren}\\
32x &= 64 && |\ :32\\
x &= 2
\end{aligned}
$$

Die Zahl 2 muss in das Kästchen eingesetzt werden.

Aufgabe 6

Beide Ranglisten stimmen in ihren Minimalwerten (= 42) und in ihren Maximalwerten (= 58) überein.

Rangliste A:

Berechnung des unteren Quartils q_u: $13\cdot\frac{1}{4} = 3{,}25$. Rangplatz von q_u ist 4. Folglich gilt: $\mathbf{q_u = 45}$

Berechnung des Zentralwertes z: $13\cdot\frac{1}{2} = 6{,}5$. Rangplatz von q_u ist 7. Folglich gilt: $\mathbf{z = 48}$

Berechnung des oberen Quartils q_o: $13\cdot\frac{3}{4} = 9{,}75$. Rangplatz von q_o ist 10. Folglich gilt: $\mathbf{q_o = 54}$

Rangliste B:

Berechnung des unteren Quartils q_u: $9\cdot\frac{1}{4} = 2{,}25$. Rangplatz von q_u ist 3. Folglich gilt: $\mathbf{q_u = 45}$

Berechnung des Zentralwertes z: $9\cdot\frac{1}{2} = 4{,}5$. Rangplatz von q_u ist 5. Folglich gilt: $\mathbf{z = 48}$

Berechnung des oberen Quartils q_o: $9\cdot\frac{3}{4} = 6{,}75$. Rangplatz von q_o ist 7. Folglich gilt: $\mathbf{q_o = 55}$

Vergleicht man die Kennwerte der beiden Ranglisten mit denen des Boxplots, so erkennt man, dass nur die Kennwerte der Rangliste B mit denen des Boxplots vollständig übereinstimmen.
Die Lösung der Aufgabe ist folglich: **Rangliste B**

Aufgabe 7

Die Anteile der Sportarten werden wie folgt berechnet:

Fußball: $\frac{40}{80} = \frac{1}{2} = 50\,\%$; Handball: $\frac{24}{80} = \frac{3}{10} = 30\,\%$; Volleyball: $\frac{16}{80} = \frac{1}{5} = 20\,\%$

Das einzige Diagramm, in dem diese Anteile richtig abgebildet sind, ist **Diagramm 3**.
In Diagramm 2 stimmen zwei der drei Prozentsätze nicht. In Diagramm 1 ist der größte abgebildete Kreissektor kein exakter Halbkreis. Dies müsste aber bei einem Prozentsatz von 50 % für „Fußball" ein exakter Halbkreis sein. Folglich gehört Diagramm 1 nicht zur abgebildeten Tabelle.

Aufgabe 8

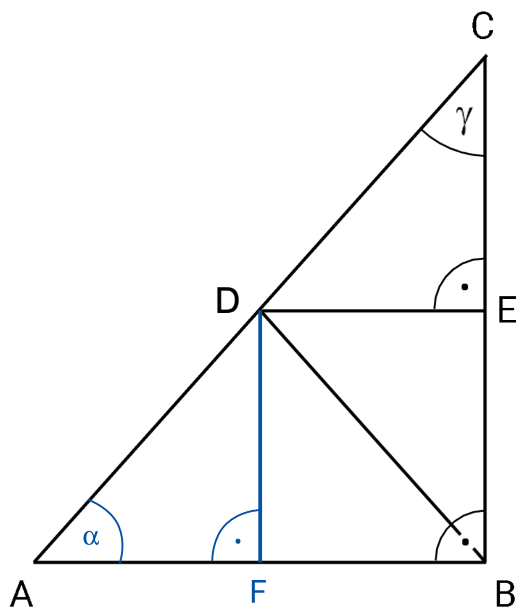
a) Von einem Muster zum nächsten kommen immer 3 weitere Plättchen hinzu. In Muster (4) gibt es bereits 10 Plättchen. Um zu Muster (8) zu gelangen, müssen also zu den 10 Plättchen in Muster (4) noch viermal 3 Plättchen (also 12 Plättchen) hinzugelegt werden.
Emily benötigt für Muster (8) folglich 10 + 12 = 22 Plättchen.

b)

	richtig	falsch
s = 3n – 2	X	
s = 3 – 2n		X
s = 3(n – 1) + 1	X	
s = 2n – 1		X

Teil A2 (Pflichtteil)

Aufgabe 1



Vorbemerkungen:

Für die Lösung der Aufgabe wurden eine Hilfsstrecke $\overline{DF}$ und der Winkel α in der Zeichnung ergänzt.
Da laut Aufgabenstellung $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD}$ gilt, kann Folgendes geschlossen werden:

$\overline{AC} = 2 \cdot \overline{CD} = 2 \cdot 6{,}3\text{ cm} = 12{,}6\text{ cm}$

(1) Berechnung von $\overline{AB}$ im rechtwinkligen Dreieck ABC:

$\sin(41{,}8°) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{12{,}6} \quad | \cdot 12{,}6$

$12{,}6 \cdot \sin(41{,}8°) = \overline{AB}$

$\overline{AB} \approx 8{,}4\text{ cm}$

(2) Berechnung des Umfangs u des Dreiecks ABD:

$u = \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{AD}$

$u \approx 8{,}4 + 6{,}3 + 6{,}3$

$u \approx 21\text{ cm}$

(3) Berechnung des Flächeninhalts A des Dreiecks ABD:

Für die Berechnung des gesuchten Flächeninhalts benötigt man zunächst die Größen α und $\overline{DF}$ (siehe Zeichnung oben).

(3.1) Berechnung des Winkels α im rechtwinkligen Dreieck ABC:

$\alpha = 180° - 90° - 41{,}8°$ (Winkelsumme im Dreieck)

$\alpha = 48{,}2°$

(3.2) Berechnung von $\overline{DF}$ im rechtwinkligen Dreieck FDA:

$\sin(48{,}2°) = \frac{\overline{DF}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{DF}}{6{,}3}$ $\quad | \cdot 6{,}3$

$6{,}3 \cdot \sin(48{,}2°) = \overline{DF}$

$\overline{DF} \approx 4{,}7$ cm

(3.3) Berechnung des Flächeninhalts A des Dreiecks ABD:

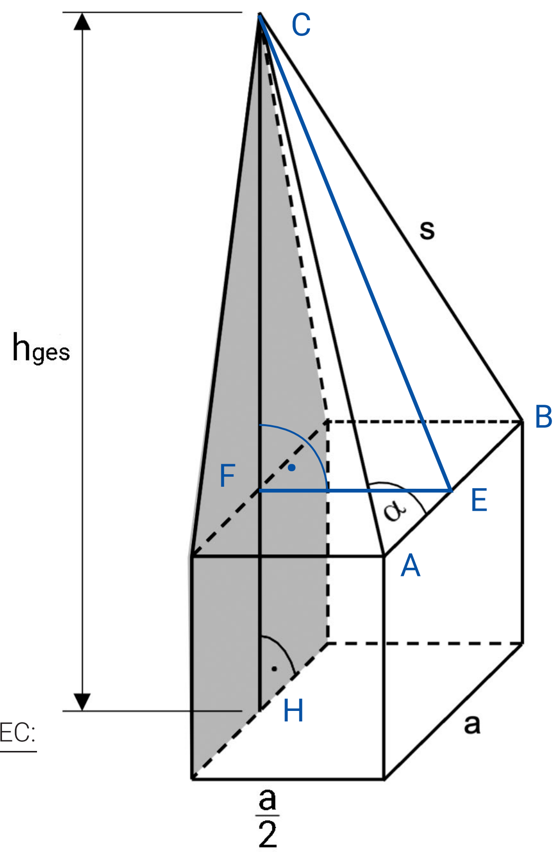
$A = 0{,}5 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{DF}$
$A \approx 0{,}5 \cdot 8{,}4 \cdot 4{,}7$
$A \approx 19{,}74\ \text{cm}^2$

Aufgabe 2

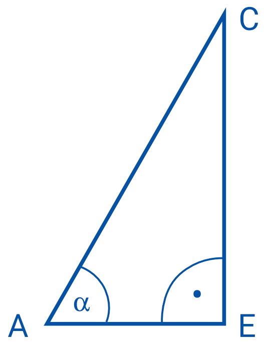
Vorbemerkungen:

Der gesuchte Flächeninhalt A_s ergibt sich als Summe des Flächeninhaltes A_R des unteren Rechtecks und des Flächeninhaltes A_D des darüber liegenden Dreiecks:

$A_s = A_R + A_D$. Die beiden Flächeninhalte A_R und A_D werden separat berechnet.



(1) Berechnung der Strecke $\overline{EC}$ im rechtwinkligen Dreieck AEC:



Da das Dreieck ABC als Seitenfläche der quadratischen Pyramide gleichschenklig ist, gilt:

$\overline{AC} = \overline{BC} = s = 16{,}3$ cm

Folglich gilt:

$\sin(68{,}9°) = \frac{\overline{EC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EC}}{16{,}3}$ $\quad | \cdot 16{,}3$

$16{,}3 \cdot \sin(68{,}9°) = \overline{EC}$

$\overline{EC} \approx 15{,}21$ cm

(2) Berechnung der Strecke $\overline{AE} = \frac{a}{2}$ im rechtwinkligen Dreieck AEC:

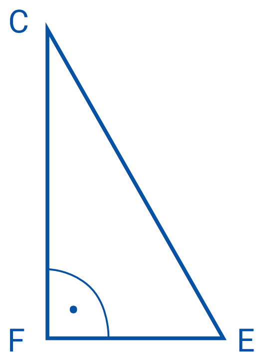
$\cos(68{,}9°) = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AE}}{16{,}3}$ $\quad | \cdot 16{,}3$

$16{,}3 \cdot \cos(68{,}9°) = \overline{AE}$

$\overline{AE} = \frac{a}{2} \approx 5{,}87$ cm $\quad | \cdot 2$

$a \approx 11{,}74$ cm

(3) Berechnung der Strecke $\overline{FC}$ im rechtwinkligen Dreieck FEC:



Da $\overline{FE} = \overline{AE} = \frac{a}{2} \approx 5{,}87$ cm gilt, gilt auch Folgendes:

$\overline{FC}^2 + \overline{FE}^2 = \overline{CE}^2$ (Pythagoras) $\quad | - \overline{FE}^2$

$\overline{FC}^2 = \overline{CE}^2 - \overline{FE}^2$ $\quad | \sqrt{}$

$\overline{FC} = \sqrt{\overline{CE}^2 - \overline{FE}^2}$

$\overline{FC} \approx \sqrt{15{,}21^2 - 5{,}87^2}$

$\overline{FC} \approx 14{,}03$ cm

(4) Berechnung der Strecke $\overline{HF}$:

$\overline{HF} = h_{ges} - \overline{FC}$

$\overline{HF} \approx 20{,}6 - 14{,}03$

$\overline{HF} \approx 6{,}57$ cm

(5) Berechnung des gesuchten Flächeninhalts A_s:

$A_s = A_R + A_D$

$A_s = \overline{HF} \cdot a + 0{,}5 \cdot a \cdot \overline{FC}$

$A_s \approx 6{,}57 \cdot 11{,}74 + 0{,}5 \cdot 11{,}74 \cdot 14{,}03$

$A_s \approx 159{,}49\ \text{cm}^2$

Aufgabe 3

(1) $3(x - y) = y + 8$

(2) $3y = \frac{x - 5}{2}$

Division der Gleichung (2) durch 3 ergibt:

(2`) $y = \frac{x - 5}{6}$

Einsetzen von $y = \frac{x - 5}{6}$ in Gleichung (1) ergibt:

$3\left(x - \frac{x - 5}{6}\right) = \frac{x - 5}{6} + 8$ $\quad |$ vereinfachen

$3x - \frac{3x - 15}{6} = \frac{x - 5}{6} + 8$ $\quad | \cdot 6$

$18x - (3x - 15) = x - 5 + 48$ $\quad |$ vereinfachen

$18x - 3x + 15 = x + 43$ $\quad |$ vereinfachen

$15x + 15 = x + 43$ $\quad | - 15 - x$

$14x = 28$ $\quad | : 14$

$x = 2$

Einsetzen von $x = 2$ in (2) ergibt:

$3y = \frac{2-5}{2}$ | vereinfachen

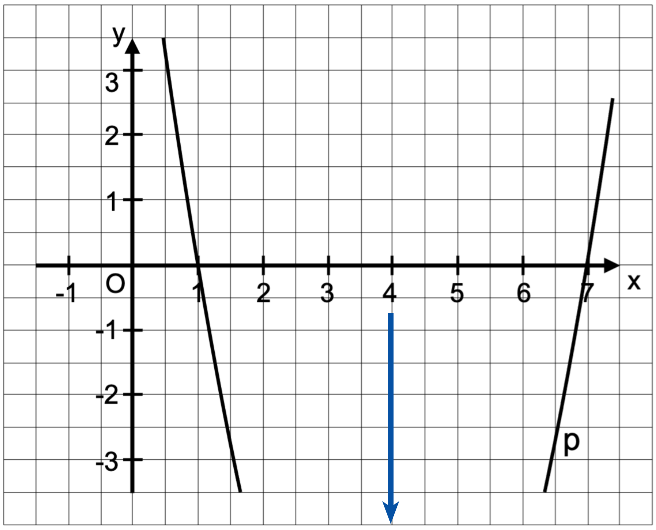
$3y = -1{,}5$ | : 3

$y = -0{,}5$

Die Lösung des Gleichungssystems lautet folglich: $x = 2$ und $y = -0{,}5$

Aufgabe 4

(1) Bestimmung der Funktionsgleichung der Parabel:



3^2 (= 9) Einheiten nach unten zum Scheitel S

Die x-Koordinate x_S des Scheitelpunkts S der Parabel liegt wegen der Symmetrie der Parabel in der Mitte der beiden Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 7$. Also gilt: $x_S = (1 + 7) : 2 = 8 : 2 = 4$

Der Abstand von x_S zu den beiden Nullstellen beträgt 3. Deshalb liegt die y-Koordinate y_S der Parabel 3^2 (= 9) Einheiten unterhalb der x-Achse, also ist $y_S = -9$. Damit gilt: $S\,(4\,|\,-9)$

Da es sich um eine verschobene Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S\,(4\,|\,-9)$ handelt, hat sie die Gleichung $y = (x-4)^2 - 9$.

(2) Berechnung der Schnittpunkte A und B der Geraden g und der Parabel p:

Zunächst muss die Geradengleichung von g bestimmt werden. Laut Aufgabenstellung beträgt der y-Achsenabschnitt der Geraden 2 und die Steigung hat den Wert −2. Damit gilt: g: $y = -2x + 2$. Nun können die Schnittpunkte berechnet werden.

$(x-4)^2 - 9 = -2x + 2$ | Termumformung (Binomische Formel)

$x^2 - 8x + 16 - 9 = -2x + 2$ | $+ 2x - 2$

$x^2 - 6x + 5 = 0$ | Lösungsformel

$$x_{1,2} = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 5}$$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-5}$$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{4}$$

$$x_{1,2} = 3 \pm 2$$

$$x_1 = 3 - 2 = 1$$

$$x_2 = 3 + 2 = 5$$

Einsetzen der gefundenen Werte für x_1 und x_2 z.B. in die Gleichung von g:

$y_1 = -2 + 2 = 0$

$y_2 = -10 + 2 = -8$

Damit gilt für die Schnittpunkte A und B: A $(1 \mid 0)$ und B $(5 \mid -8)$

Aufgabe 5

(1) Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „zwei gleiche Symbole“:

P(„zwei gleiche Symbole“) = P(■;■) + P(▲;▲) + P(●;●)

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{15} + \frac{1}{15} + \frac{2}{15}$$

$$= \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \approx 33{,}3\ \%$$

(2) Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Kreis und Dreieck“:

P(„Kreis und Dreieck“) = P(●;▲) + P(▲;●)

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{15} + \frac{1}{15}$$

$$= \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 20\ \%$$

(3) Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „höchstens ein graues Feld“:

P(„höchstens ein graues Feld“) = 1 – P(„zwei graue Felder“) $= 1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15} \approx 86{,}7\ \%$

Aufgabe 6

(1) Berechnung des Zuwachses in Prozent:

Die Differenz der Onlineausgaben zwischen 2021 und 2020 beträgt (in Mio.):

7789 – 7484 = 305.

$$W = G \cdot \frac{p}{100}$$

$$305 = 7484 \cdot \frac{p}{100} \qquad \left| : 7484 \quad \right| \cdot 100$$

$$p \approx 4{,}08\ \%$$

Damit beträgt der prozentuale Wertzuwachs etwa 4,08 %.

(2) Berechnung der Ausgaben für Bannerwerbung im Jahr 2019:

$$G = \frac{W}{p\ \%}$$

$$G = \frac{895}{109{,}5\ \%}$$

$$G = \frac{895}{1{,}095}$$

$G \approx 817{,}35$ Mio. €

Die Ausgaben für Bannerwerbung betrugen im Jahr 2019 etwa 817,35 Mio. €.

(3) Berechnung der Ausgaben für Social-Media-Werbung im Jahr 2026:

Da sich der Zuwachs von 12,25 % auf das jeweilige Vorjahr bezieht, handelt es sich hier um einen mathematischen Zusammenhang, den man in der Zinsrechnung als „Zinseszins" bezeichnet. Folglich kann hier die „Zinseszinsformel" verwendet werden. Dabei bezeichnet S_0 die Ausgaben für Social-Media-Werbung im Jahr 2021 und S_5 die Ausgaben für Social-Media-Ausgaben im Jahr 2026.

$$S_5 = S_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^5$$

$$S_5 = 614 \cdot \left(1 + \frac{12{,}25}{100}\right)^5$$

$$S_5 = 614 \cdot \left(1 + 0{,}1225\right)^5$$

$$S_5 \approx 1094{,}21 \text{ Mio. €}$$

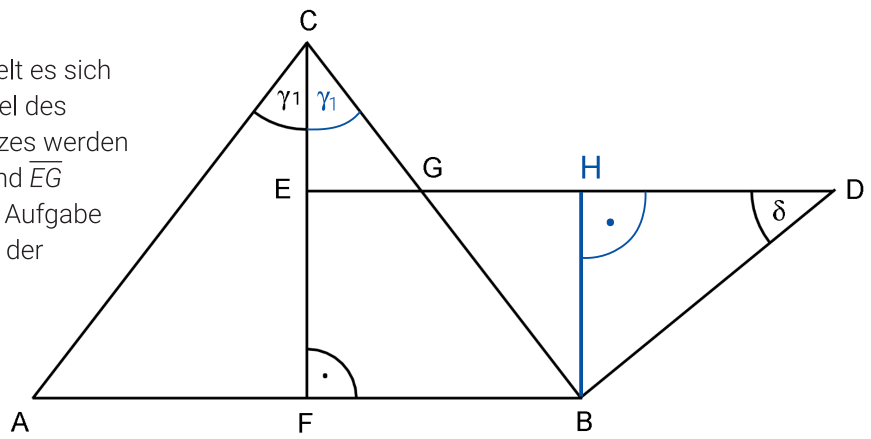
Im Jahr 2026 würden die Ausgaben für Social-Media-Werbung folglich etwa 1094,21 Mio. € betragen.

Wahlteil B

Aufgabe 1

a) Vorbemerkungen:

Bei dem Viereck FBGE handelt es sich um ein Trapez. Für die Formel des Flächeninhalts dieses Trapezes werden die Streckenlängen $\overline{FB}$, $\overline{FE}$ und $\overline{EG}$ benötigt. Für die Lösung der Aufgabe wurde die Hilfsstrecke $\overline{HB}$ in der Zeichnung ergänzt.



(1) Berechnung der Strecke AF im rechtwinkligen Dreieck AFC:

$$\sin(37{,}6°) = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AF}}{11{,}4} \quad \Big| \cdot 11{,}4$$

$$11{,}4 \cdot \sin(37{,}6°) = \overline{AF}$$

$$\overline{AF} \approx 6{,}96 \text{ cm}$$

Da das Dreieck ABC gleichschenklig ist, gilt:

$$\overline{AF} = \overline{FB} \approx 6{,}96 \text{ cm}$$

Damit wurde die erste der drei gesuchten Streckenlängen bestimmt (siehe Vorbemerkung).

(2) Berechnung der Strecke $\overline{HB}$ im rechtwinkligen Dreieck HBD:

$$\sin(39{,}2°) = \frac{\overline{HB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{HB}}{8{,}2} \ / \ = \ / \quad \Big| \cdot 8{,}2$$

$$8{,}2 \cdot \sin(39{,}2°) = \overline{HB}$$

$$\overline{HB} \approx 5{,}18 \text{ cm}$$

Der Zeichnung kann man entnehmen, dass $\overline{HB} = \overline{FE} \approx 5{,}18$ cm.

Damit wurde die zweite der drei gesuchten Streckenlängen bestimmt (siehe Vorbemerkung).

(3) Berechnung der Strecke $\overline{CF}$ im rechtwinkligen Dreieck AFC:

$\cos(37{,}6°) = \frac{\overline{CF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CF}}{11{,}4}$ $\quad | \cdot 11{,}4$

$11{,}4 \cdot \cos(37{,}6°) = \overline{CF}$

$\overline{CF} \approx 9{,}03$ cm

Der Zeichnung kann man entnehmen, dass $\overline{CE} = \overline{CF} - \overline{FE} \approx 9{,}03$ cm $- 5{,}18$ cm $= 3{,}85$ cm

(4) Berechnung der Strecke $\overline{EG}$ im rechtwinkligen Dreieck EGC:

Da das Dreieck ABC gleichschenklig ist, ist die eingezeichnete Höhe auf die Seite $\overline{AB}$ auch gleichzeitig Winkelhalbierende des Winkels bei C. Damit ist der Winkel bei C im Dreieck EGC ebenfalls $\gamma_1 = 37{,}6°$.

$\tan(37{,}6°) = \frac{\overline{EG}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{EG}}{3{,}85}$ $\quad | \cdot 3{,}85$

$3{,}85 \cdot \tan(37{,}6°) = \overline{EG}$

$\overline{EG} \approx 2{,}96$ cm

Damit wurde die dritte der drei gesuchten Streckenlängen bestimmt (siehe Vorbemerkung).

(5) Berechnung des gesuchten Flächeninhalts des Vierecks (Trapezes) FBGE:

$A = 0{,}5 \cdot (\overline{FB} + \overline{EG}) \cdot \overline{FE}$

$A \approx 0{,}5 \cdot (6{,}96 + 2{,}96) \cdot 5{,}18$

$A \approx 25{,}69\ \text{cm}^2$

b)

► Berechnung der Funktionsgleichung der Parabel p:

Einsetzen des Punktes A $(1\,|\,1)$ in die Parabelgleichung $y = x^2 + bx - 2$ ergibt:

$1 = 1^2 + b - 2$ $\quad |$ zusammenfassen

$1 = b - 1$ $\quad | + 1$

$b = 2$

Damit lautet die Parabelgleichung von p: $y = x^2 + 2x - 2$.

► Bestimmung der Koordinaten der Punkte B und C:

Einsetzen des Punktes B $(-3\,|\,y_B)$ in die Parabelgleichung $y = x^2 + 2x - 2$ ergibt:

$y_B = (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 2$

$y_B = 9 - 6 - 2 = 1$

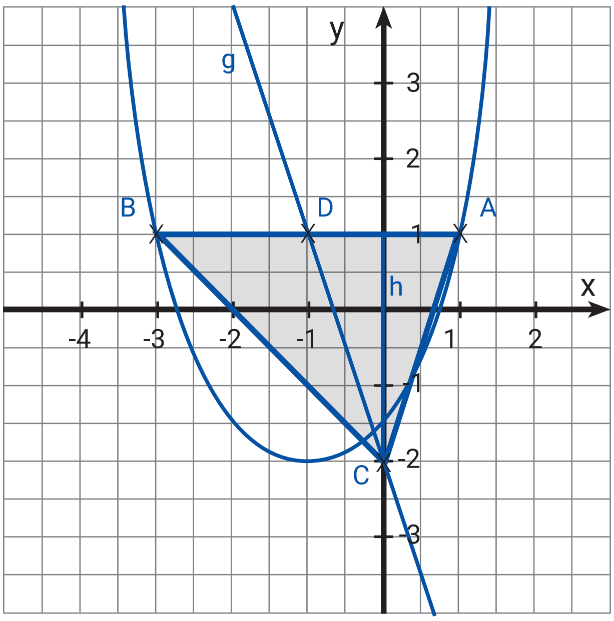
Damit gilt: B $(-3\,|\,1)$

Einsetzen des Punktes C $(0\,|\,y_C)$ in die Parabelgleichung $y = x^2 + 2x - 2$ ergibt:

$y_C = 0^2 + 2 \cdot 0 - 2 = -2$

Damit gilt: C $(0\,|\,-2)$

- Bestimmung des Flächeninhalts des Dreiecks ABC:



Wählt man als Grundseite des Dreiecks ABC die Seite $\overline{AB}$, dann ist die Strecke h (siehe Zeichnung) die zugehörige Höhe. Beide Streckenlängen kann man der Zeichnung entnehmen:

$\overline{AB}$ = 4 LE; h = 3 LE (LE = Längeneinheiten)

Damit gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks:

$A = 0{,}5 \cdot 4 \cdot 3$

$A = 6$ FE (FE = Flächeneinheiten)

- Bestimmung der Funktionsgleichung der Geraden g:

Mit der Steigung $m = -3$ und dem y-Achsenabschnitt -2 lautet die Gleichung von g:

$y = -3x - 2$

- Überprüfung der Aussage von Julius:

Die Aussage von Julius ist wahr.

Begründung: Da die Gerade g durch den Punkt D $(-1 \mid 1)$ verläuft (was rechnerisch schnell überprüfbar ist und außerdem auch aus der Zeichnung (siehe oben) ablesbar ist), halbiert dieser Punkt D die Strecke $\overline{AB}$. Da außerdem die Höhe des Dreiecks ABC auch die Höhe des Dreiecks ADC ist, ist der Flächeninhalt des Dreiecks ADC genau halb so groß wie der des Dreiecks ABC. Die Gerade g halbiert also tatsächlich den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

Aufgabe 2

a)

- Bestimmung der Funktionsgleichung der Parabel p_1:

Aus der Wertetabelle lassen sich die beiden Punkte A $(0 \mid 1)$ und B $(4 \mid 1)$ ablesen. Diese beiden Punkte kann man in die allgemeine Form der Parabelgleichung $y = x^2 + bx + c$ einsetzen, um die Parameter b und c zu berechnen:

Einsetzen des Punktes A $(0 \mid 1)$ ergibt:

$1 = 0^2 + b \cdot 0 + c \qquad \mid$ vereinfachen

$c = 1$

Damit lautet die (vorläufige) Parabelgleichung $y = x^2 + bx + 1$.

Einsetzen des Punktes B (4 | 1) ergibt:

$$
\begin{aligned}
1 &= 4^2 + b \cdot 4 + 1 && |\,\text{vereinfachen}\\
1 &= 16 + 4b + 1 && |\,\text{vereinfachen}\\
1 &= 4b + 17 && |\,-17\\
-16 &= 4b && |\,:4\\
b &= -4
\end{aligned}
$$

Damit lautet die Funktionsgleichung von p_1: $y = x^2 - 4x + 1$.

► Vervollständigung der Wertetabelle:

Nacheinander folgendes Einsetzen der x-Werte –1; 1; 2; 3; 5 in die Funktionsgleichung von p_1 ergibt:

$x = -1;\ y = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 1 = 1 + 4 + 1 = 6$

$x = 1;\ \ y = 1^2 - 4 \cdot 1 + 1 = 1 - 4 + 1 = -2$

$x = 2;\ \ y = 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 4 - 8 + 1 = -3$

$x = 3;\ \ y = 3^2 - 4 \cdot 3 + 1 = 9 - 12 + 1 = -2$

$x = 5;\ \ y = 5^2 - 4 \cdot 5 + 1 = 25 - 20 + 1 = 6$

Einsetzen der oben gefundenen Werte in die Wertetabelle ergibt:

x	−1	0	1	2	3	4	5
y	**6**	1	**−2**	**−3**	**−2**	1	**6**

► Berechnung der Funktionsgleichung der Geraden g:

Einsetzen des Punktes P (3 | –5) in die Geradengleichung $y = mx - 2$ ergibt:

$$
\begin{aligned}
-5 &= m \cdot 3 - 2 && |\,+2\\
-3 &= 3m && |\,:3\\
m &= -1
\end{aligned}
$$

Damit lautet die Gleichung von g: $y = -x - 2$.

► Bestimmung möglicher Schnittpunkte von g und p_1:

Gleichsetzen der Funktionsgleichungen von g und p_1 ergibt:

$$
\begin{aligned}
x^2 - 4x + 1 &= -x - 2 && |\,+x+2\\
x^2 - 3x + 3 &= 0 && |\,\text{Lösungsformel}
\end{aligned}
$$

$$x_{1,2} = -\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 3}$$

$$x_{1,2} = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 - 3}$$

Da mit $2{,}25 - 3 = -0{,}75$ eine negative Zahl unter der Wurzel steht, kann es keine Lösung geben, denn aus negativen Zahlen kann keine Wurzel gezogen werden.

► Bestimmung der Funktionsgleichung einer Parabel p_2, die weder mit p_1 noch mit g einen Schnittpunkt hat:

Zunächst sollte man die Funktionsgleichung von p_1 mithilfe der quadratischen Ergänzung in die Scheitelform umformen, um die Lage der Parabel im Koordinatensystem besser einschätzen zu können.

$y = x^2 - 4x + 1$

$\quad = (x - 2)^2 - 2^2 + 1$

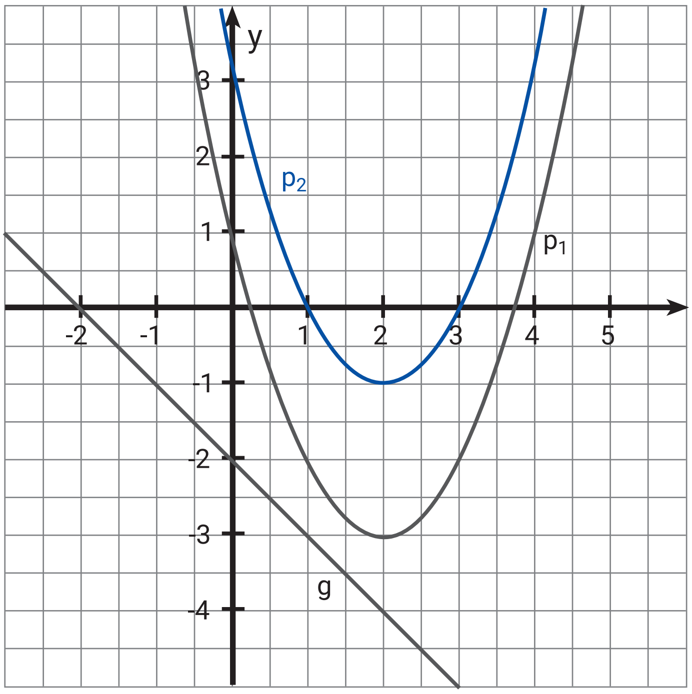
$\quad = (x - 2)^2 - 4 + 1$

$\quad = (x - 2)^2 - 3$

Die Parabel p_1 hat folglich den Scheitelpunkt S $(2 \mid -3)$.

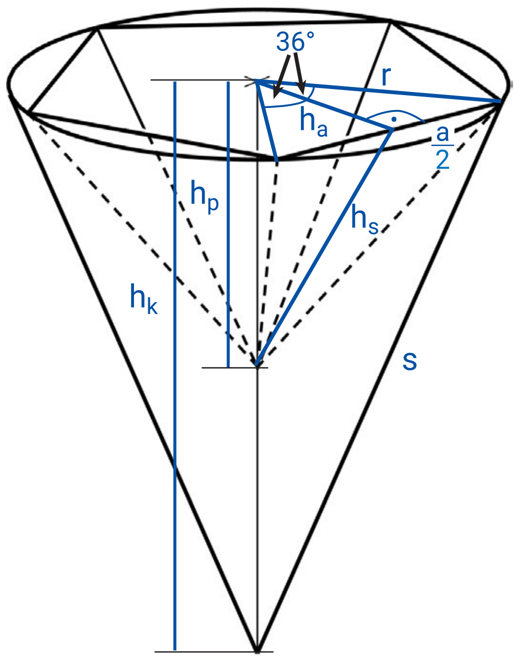
Jede Parabel, deren Scheitelpunkt dieselbe x-Koordinate wie der Scheitelpunkt von p_1, aber eine größere y-Koordinate als der Scheitelpunkt von p_1 hat, hat weder einen Schnittpunkt mit p_1 noch mit g.
In der folgenden Zeichnung wurde als Scheitelpunkt einer möglichen Parabel p_2 als Beispiel der Punkt $(2 \mid -1)$ gewählt, sodass gilt: p_2: $y = (x - 2)^2 - 1$. Man hätte aber auch als y-Koordinate dieses Scheitelpunktes von p_2 jeden anderen Wert wählen können, der größer als -3 ist.

Einzeichnen von p_1 und g in dasselbe Koordinatensystem ergibt:



b) Vorbemerkungen:

Für die Berechnung des Kegelmantels ($M_K = p \cdot r \cdot s$) sind die beiden Größen r und s zu berechnen. Für den Mantel der Pyramide wird die Höhe h_s in einem der fünf kongruenten Seitenflächendreiecke benötigt.

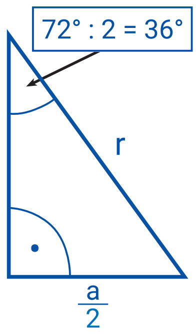


(1) Berechnung des Radius r im Grundkreis des Kegels:

Durch das regelmäßige Fünfeck wird der gesamte 360°-Kreis (Grundkreis des Kegels) in fünf kongruente (also gleich große) Sektoren geteilt. Damit gilt für jeden Winkel γ an jeder Spitze (Mittelpunkt des Kreises) der fünf Dreiecke:

$\gamma = 360° : 5 = 72°$

Da diese fünf Dreiecke jeweils gleichschenklig sind, halbiert die Höhe auf die jeweilige Grundseite a sowohl den Winkel an der Spitze (72° : 2 = 36°) als auch die Grundseite a (siehe das gezeichnete Teildreieck rechts).



$$\sin(36°) = \frac{\frac{a}{2}}{r} = \frac{4{,}3}{r} \qquad | \cdot r$$

$$r \cdot \sin(36°) = 4{,}3 \qquad | : \sin(36°)$$

$$r = \frac{4{,}3}{\sin(36°)}$$

$$r \approx 7{,}32 \text{ cm}$$

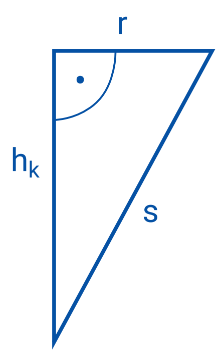
(2) Berechnung der Seitenkante s des Kegels:

$$s^2 = h_k^2 + r^2$$

$$s^2 \approx 15{,}2^2 + 7{,}32^2 \qquad | \sqrt{}$$

$$s \approx \sqrt{15{,}2^2 + 7{,}32^2}$$

$$s \approx 16{,}87 \text{ cm}$$



(3) Berechnung der Mantelfläche M_K des Kegels:

$M_K = \pi \cdot r \cdot s$

$M_K \approx \pi \cdot 7{,}32 \cdot 16{,}87$

$M_K \approx 387{,}95\ cm^2$

(4) Berechnung der Dreieckshöhe h_a (siehe Zeichnung am Anfang der Lösung):

$\cos(36°) = \frac{h_a}{r} \quad | \cdot r$

$r \cdot \cos(36°) = h_a$

$h_a \approx 7{,}32 \cdot \cos(36°)$

$h_a \approx 5{,}92\ cm$

(5) Berechnung der Dreieckshöhe h_s (siehe Zeichnung am Anfang der Lösung):

$h_s^2 = h_p^2 + h_a^2 \quad | \sqrt{}$

$h_s = \sqrt{h_p^2 + h_a^2}$

$h_s \approx \sqrt{7{,}6^2 + 5{,}92^2}$

$h_s \approx 9{,}63\ cm$

(6) Berechnung der Mantelfläche M_P der Pyramide:

Der Mantel der Pyramide besteht aus 5 kongruenten (also gleich großen) Dreiecken.
Deshalb wird zunächst der Flächeninhalt A_D eines dieser Dreiecke berechnet:

$A_D = 0{,}5 \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe auf die Grundseite}$

$A_D = 0{,}5 \cdot a \cdot h_s$

$A_D \approx 0{,}5 \cdot 8{,}6 \cdot 9{,}63$

$A_D \approx 41{,}41\ cm^2$

Der komplette Mantel M_P der Pyramide hat also folgenden Flächeninhalt:

$M_P = 5 \cdot A_D$

$M_P \approx 5 \cdot 41{,}41$

$M_P \approx 207{,}05\ cm^2$

(7) Berechnung der Differenz D zwischen den Inhalten der Mantelflächen M_K und M_P:

$D = M_K - M_P$

$D \approx 387{,}95 - 207{,}05$

$D \approx 180{,}9\ cm^2$

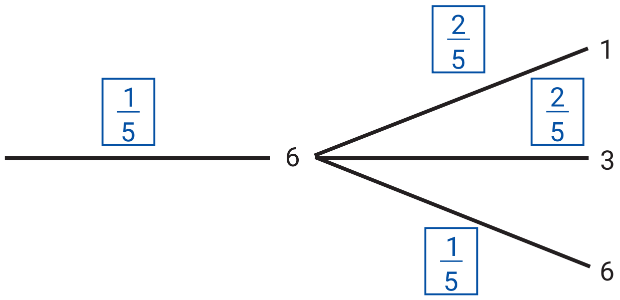
Die Inhalte der beiden Mantelflächen unterscheiden sich um etwa $180{,}9\ cm^2$.

Aufgabe 3

a)

(1) Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Zahl ist größer als 60“:

Es handelt sich um einen zweistufigen Zufallsversuch, wobei die Zehnerziffer die erste und die Einerziffer die zweite Stufe darstellt. Nur folgende Pfade gehören zu dem Ereignis „Zahl ist größer als 60“:



Damit gilt:

P(„Zahl ist größer als 60“) = $\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = 20\ \%$

(2) Berechnung des Erwartungswerts für den Gewinn bei diesem Glücksspiel:

P(„Zahl ist größer als 60“) = $\frac{5}{25} = \frac{1}{5} = 20\ \%$ (Berechnung siehe (1))

P(„Zahl ist 33“) = P(Zehnerziffer = 3) · P(Einerziffer = 3) = $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25} = 16\ \%$

P(„restliche Möglichkeiten“) = $1 - \frac{5}{25} - \frac{4}{25} = \frac{16}{25} = 64\ \%$

Erwartungswert = $\frac{5}{25} \cdot 3{,}00 + \frac{4}{25} \cdot 6{,}00 + \frac{16}{25} \cdot 0 - 2{,}00 = \frac{15}{25} + \frac{24}{25} - \frac{50}{25} = -\frac{11}{25} = -0{,}44$

Der (negative) Erwartungswert von –0,44 € bedeutet, dass die Klasse 10a im Durchschnitt auf lange Sicht pro Spiel einen Reingewinn von 0,44 € erzielt.

(3) Berechnung des Erwartungswerts für den Gewinn bei diesem Glücksspiel nach Ersetzung einer 3 durch eine 6 auf jedem der beiden Streifen:

Zunächst müssen die Wahrscheinlichkeiten aller drei Ereignisse aus (2) neu berechnet werden:

P(„Zahl ist größer als 60“) = P(Zehnerziffer = 6) · P(Einerziffer beliebig) = $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{5} = \frac{10}{25} = 40\ \%$

P(„Zahl ist 33“) = P(Zehnerziffer = 3) · P(Einerziffer = 3) = $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25} = 4\ \%$

P(„restliche Möglichkeiten“) = $1 - \frac{10}{25} - \frac{1}{25} = \frac{14}{25} = 56\ \%$

Erwartungswert = $\frac{10}{25} \cdot 3{,}00 + \frac{1}{25} \cdot 6{,}00 + \frac{14}{25} \cdot 0 - 2{,}00 = \frac{30}{25} + \frac{6}{25} - \frac{50}{25} = -\frac{14}{25} = -0{,}56$

Der (negative) Erwartungswert von –0,56 € bedeutet, dass die Klasse 10a im Durchschnitt auf lange Sicht pro Spiel einen Reingewinn von 0,56 € erzielt.

Der Gewinn der Klasse 10 a erhöht sich dadurch also im Durchschnitt, und zwar um 0,56 € – 0,44 € = 0,12 € pro Spiel.

b)

► Bestimmung einer möglichen Funktionsgleichung der zugehörigen Parabel:

Die maximale Höhe des Sprungs entspricht dem Scheitelpunkt S (0|139) der Parabel. Setzt man die Koordinaten dieses Punktes in den gegebenen Ansatz der Parabelgleichung $y = ax^2 + c$ ein, ergibt sich:

$139 = a \cdot 0^2 + c$

$c = 139$

Damit lautet die vorläufige Parabelgleichung $y = ax^2 + 139$.

Die Sprungweite 220 cm entspricht dem doppelten Abstand des Absprungortes zum Ursprung des Koordinatensystems. Also sind zwei weitere Punkte der Parabel A (110|0) und B (–110|0) gegeben.
Setzt man z.B. die Koordinaten von A in die vorläufige Funktionsgleichung ein, ergibt sich:

$0 = a \cdot 110^2 + 139 \qquad | -139$

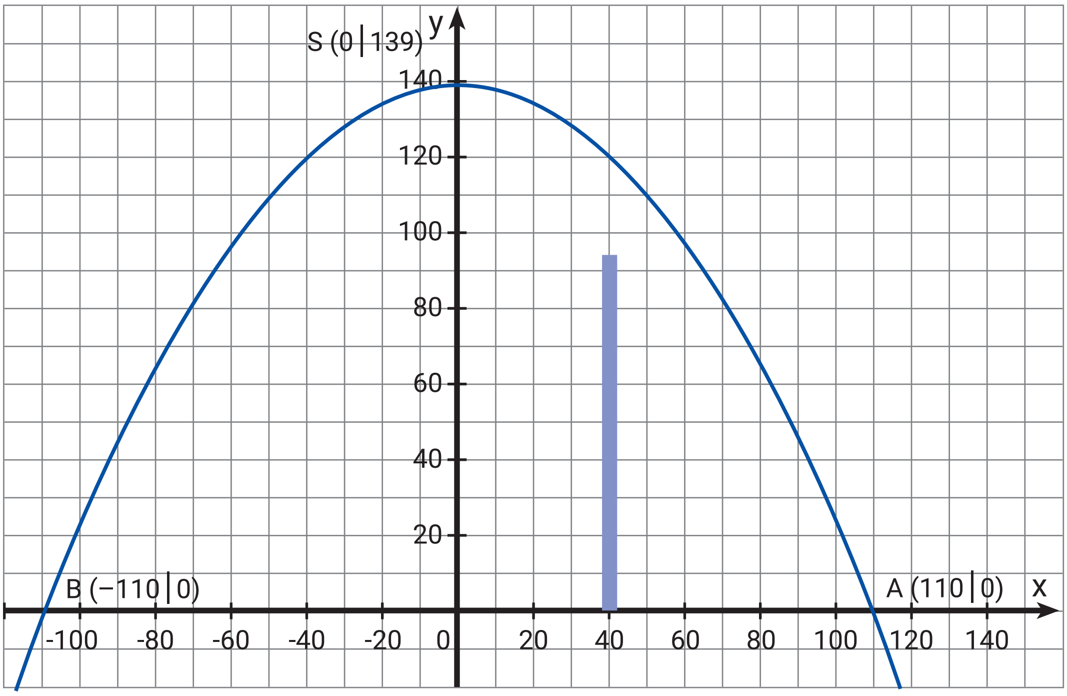
$-139 = 12\,100a \qquad | : 12\,100$

$a \approx -0{,}0115 \qquad$ (a auf 4 Dezimalstellen gerundet)

Damit lautet eine mögliche Funktionsgleichung der Parabel: $y = -0{,}0115x^2 + 139$

► Berechnung des Abstandes des Frosches vom Schilfrohr:

Die horizontale Entfernung von 150 cm nach dem Absprung entspricht im Koordinatensystem der x-Koordinate $-110 + 150 = 40$.



Setzt man den x-Wert 40 in die Parabelgleichung ein, ergibt sich:

$y = -0{,}0115 \cdot 40^2 + 139 = 120{,}6$

Der Frosch befindet sich also bei einer horizontalen Entfernung von 150 cm vom Absprung in einer Höhe von 120,6 cm. Der Abstand d des Frosches vom Schilfrohr berechnet sich dann wie folgt:
$d = 120{,}6\text{ cm} - 94\text{ cm} = 26{,}6\text{ cm}$

Prüfungen

► Berechnung der Sprungweite des zweiten Frosches und Vergleich der beiden Sprungweiten:

Gesucht sind die beiden Nullstellen der Funktion $y = -\frac{3}{200}x^2 + 165$:

$$
\begin{aligned}
-\frac{3}{200}x^2 + 165 &= 0 && \mid -165 \\
-\frac{3}{200}x^2 &= -165 && \mid \cdot\left(-\frac{200}{3}\right) \\
x^2 &= 11\,000 && \mid \sqrt{} \\
x_1 &\approx -104{,}88 \\
x_2 &\approx 104{,}88
\end{aligned}
$$

Damit beträgt die Sprungweite des Frosches etwa 2 · 104,88 cm = 209,76 cm.

Der erste Frosch hat eine etwas größere Sprungweite als der zweite. Der erste Frosch springt etwa 220 cm – 209,76 cm = 10,24 cm weiter als der zweite.

Aufgabe 4

a)

► Bestimmung der Funktionsgleichungen von p_1 und g:

Dem Schaublid kann man den Scheitelpunkt $S_1\,(0\,|\,4)$ und einen weiteren Punkt $N_1\,(-4\,|\,0)$ entnehmen. Beide Punkte liegen sowohl auf der Parabel als auch auf der Geraden.

Zunächst wird mit dem Ansatz $y = ax^2 + c$ die Parabelgleichung bestimmt, indem man die beiden Punkte S_1 und N_1 nacheinander in den Ansatz einsetzt. Setzt man die Koordinaten von S_1 ein, so ergibt sich:

$4 = a \cdot 0^2 + c$

$c = 4$

Damit lautet die vorläufige Parabelgleichung $y = ax^2 + 4$.

Setzt man nun die Koordinaten von N_1 in die vorläufige Funktionsgleichung ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 &= a \cdot (-4)^2 + 4 && \mid -4 \\ -4 &= 16a && \mid :16 \\ a &\approx -0{,}25 \end{aligned}$$

Damit lautet eine mögliche Funktionsgleichung der Parabel p_1: $y = -0{,}25x^2 + 4$.

Nun wird mit dem Ansatz $y = mx + c$ die Funktionsgleichung der Geraden g bestimmt, indem man die beiden Punkte S_1 und N_1 nacheinander in den Ansatz einsetzt. Setzt man die Koordinaten von S_1 ein, so ergibt sich:

$4 = m \cdot 0 + c$

$c = 4$

Damit lautet die vorläufige Geradengleichung $y = mx + 4$.

Setzt man nun die Koordinaten von N_1 in die vorläufige Funktionsgleichung ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 &= m \cdot (-4) + 4 && \mid -4 \\ -4 &= -4m && \mid :4 \\ m &= 1 \end{aligned}$$

Damit lautet eine mögliche Funktionsgleichung der Geraden g: $y = x + 4$.

► Bestimmung der zweiten Nullstelle N_2 von p_1:

Da der Scheitelpunkt von p_1 auf der y-Achse liegt, ist die Parabel symmetrisch zur y-Achse. Daraus folgt, dass $N_2\,(4\,|\,0)$ die zweite Nullstelle ist.

► Bestimmung des Scheitelpunkts S_2 von p_2:

Quadratische Ergänzung:

$y = x^2 - 2x - 3$

$y = x^2 - 2x + 1 - 1 - 3$

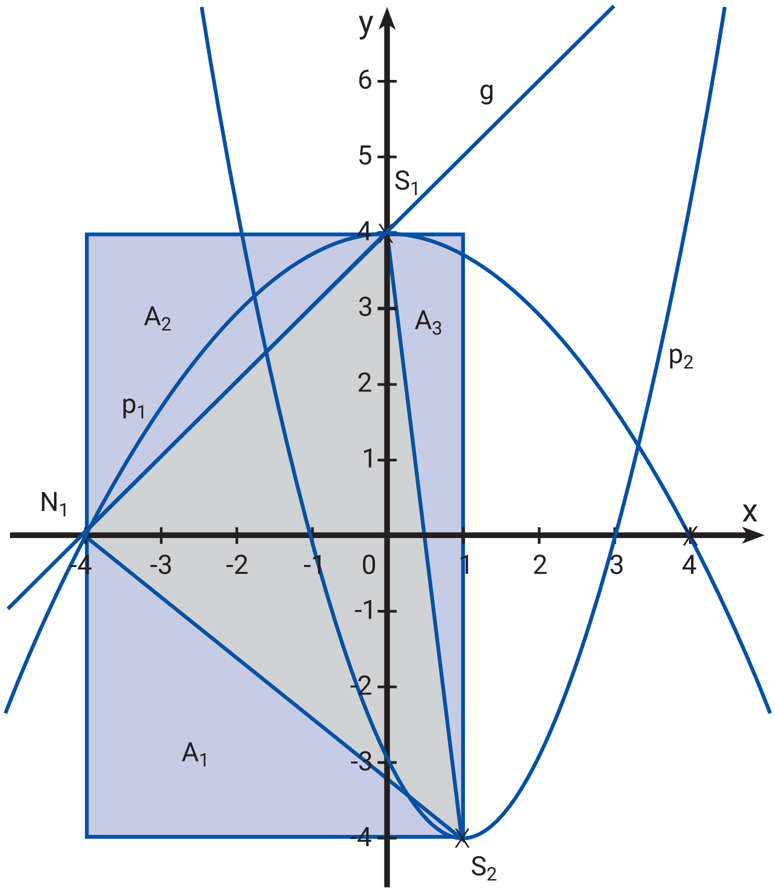
$y = (x^2 - 2x + 1) - 1 - 3$

$y = (x - 1)^2 - 4$

Damit gilt: $S_2\,(1\,|\,-4)$

▶ Berechnung des Unterschiedes der Flächeninhalte der Dreiecke $S_2S_1N_1$ und $S_2N_2S_1$:

Berechnung des Flächeninhalts $A_{S_2S_1N_1}$ des Dreiecks $S_2S_1N_1$:



Das Dreieck $S_2S_1N_1$, dessen Flächeninhalt berechnet werden soll, ist in der Zeichnung grau markiert. Es liegt vollständig in dem blau markierten großen Rechteck. Der Flächeninhalt dieses blauen Rechtecks kann in die Inhalte A_1, A_2 und A_3 der rechtwinkligen Teildreiecke sowie den Inhalt des Dreiecks $S_2S_1N_1$ zerlegt werden.

Deshalb gilt:

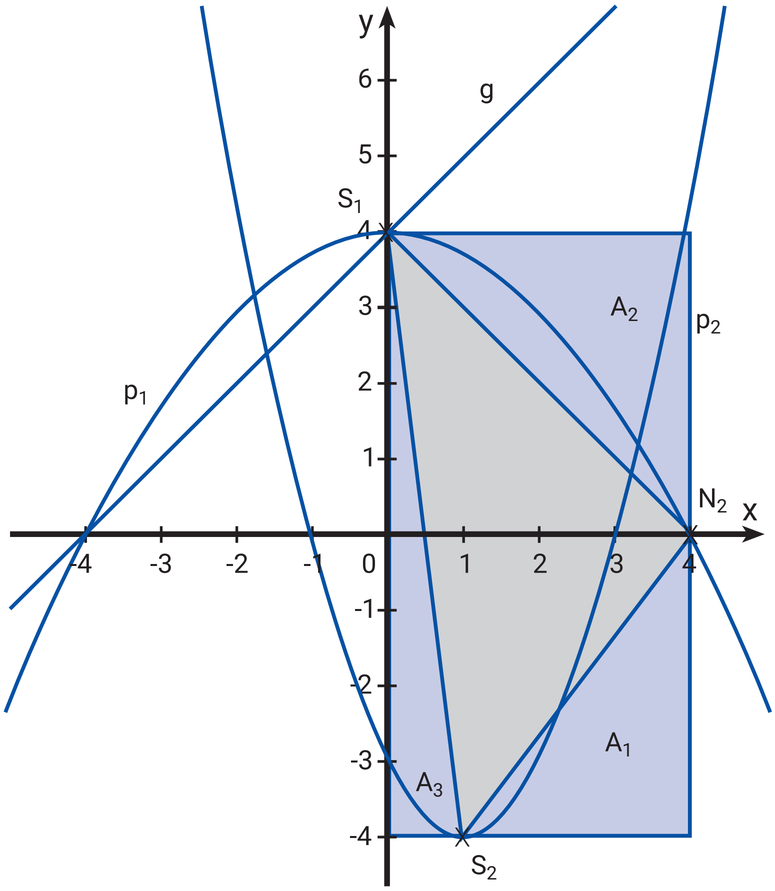
$A_{S_2S_1N_1} = A_{\text{blaues Rechteck}} - (A_1 + A_2 + A_3)$

$A_{S_2S_1N_1} = 8 \cdot 5 - (0{,}5 \cdot 5 \cdot 4 + 0{,}5 \cdot 4 \cdot 4 + 0{,}5 \cdot 1 \cdot 8)$

$A_{S_2S_1N_1} = 40 - 22$

$A_{S_2S_1N_1} = 18$ FE

Berechnung des Flächeninhalts $A_{S_2N_2S_1}$ des Dreiecks $S_2N_2S_1$:



Das Dreieck $S_2N_2S_1$, dessen Flächeninhalt berechnet werden soll, ist in der Zeichnung grau markiert. Es liegt vollständig in dem blau markierten großen Rechteck. Der Flächeninhalt dieses blauen Rechtecks kann in die Inhalte A_1, A_2 und A_3 der rechtwinkligen Teildreiecke sowie den Inhalt des Dreiecks $S_2N_2S_1$ zerlegt werden.

Deshalb gilt:

$A_{S_2N_2S_1} = A_{\text{blaues Rechteck}} - (A_1 + A_2 + A_3)$

$A_{S_2N_2S_1} = 8 \cdot 4 - (0{,}5 \cdot 3 \cdot 4 + 0{,}5 \cdot 4 \cdot 4 + 0{,}5 \cdot 1 \cdot 8)$

$A_{S_2N_2S_1} = 32 - 16$

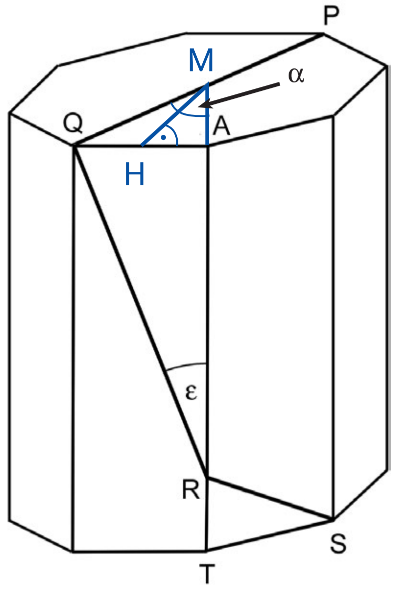
$A_{S_2N_2S_1} = 16$ FE

Die Flächeninhalte der beiden Dreiecke $S_2S_1N_1$ und $S_2N_2S_1$ unterscheiden sich um

$A_{S_2S_1N_1} - A_{S_2N_2S_1} = 18$ FE $- 16$ FE $= 2$ FE.

b) Vorbemerkungen:

Die gesuchte Höhe des Prismas setzt sich zusammen aus der Summe der Strecken $\overline{AR}$ und $\overline{RT}$. Da die Länge der Strecke $\overline{AR}$ bereits in der Aufgabenstellung gegeben ist, ist mit den folgenden Berechnungen die Strecke $\overline{RT}$ zu bestimmen.



(1) Berechnung der Strecke $\overline{QR}$ im rechtwinkligen Dreieck QRA:

$$\cos(23{,}0°) = \frac{\overline{AR}}{\overline{QR}} = \frac{14{,}2}{\overline{QR}} \qquad | \cdot \overline{QR}$$

$$\cos(23{,}0°) \cdot \overline{QR} = 14{,}2 \qquad | : \cos(23{,}0°)$$

$$\overline{QR} = \frac{14{,}2}{\cos(23{,}0°)}$$

$$\overline{QR} \approx 15{,}43 \text{ cm}$$

(2) Berechnung der Strecke $\overline{QA}$ im rechtwinkligen Dreieck QRA:

$$\tan(23{,}0°) = \frac{\overline{QA}}{\overline{AR}} = \frac{\overline{QA}}{14{,}2} \qquad | \cdot 14{,}2$$

$$\tan(23{,}0°) \cdot 14{,}2 = \overline{QA}$$

$$\overline{QA} \approx 6{,}03 \text{ cm}$$

(3) Berechnung der Strecke $\overline{PQ}$:

M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$. Dann ist die Strecke $\overline{QM}$ der Radius des Umkreises des Prismas. Da dann auch die Strecke $\overline{AM}$ der Radius des Umkreises ist, ist das Dreieck AMQ gleichschenklig. Der Winkel α im Dreieck AMQ berechnet sich in einem achteckigen Prisma so:

$\alpha = 360° : 8 = 45°$. Die Höhe $\overline{HM}$ im gleichschenkligen Dreieck AMQ halbiert sowohl die Grundseite $\overline{QA}$ als auch den Winkel $\alpha = 45°$.

Damit gilt im rechtwinkligen Dreieck HAM:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{\overline{QA}}{2}}{\overline{QM}} \qquad | \cdot \overline{QM}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \overline{QM} = \frac{\overline{QA}}{2} \qquad | : \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\overline{QM} = \frac{\frac{\overline{QA}}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\overline{QM} \approx \frac{3{,}015}{\sin(22{,}5°)}$$

$$\overline{QM} \approx 7{,}88 \text{ cm}$$

$$\overline{PQ} = 2 \cdot \overline{QM}$$

$$\overline{PQ} \approx 2 \cdot 7{,}88$$

$$\overline{PQ} \approx 15{,}76 \text{ cm}$$

(4) Berechnung der Strecke $\overline{RS}$:

$\overline{RS} = \overline{PQRS} - \overline{PQ} - \overline{QR}$

$\overline{RS} \approx 38{,}0 - 15{,}76 - 15{,}43$

$\overline{RS} \approx 6{,}81$ cm

(5) Berechnung der Strecke $\overline{RT}$ im rechtwinkligen Dreieck TSR:

Die Strecke $\overline{TS}$ ist genauso lang wie die Strecke $\overline{QA}$. Also gilt: $\overline{TS} \approx 6{,}03$ cm.
Folglich gilt mit dem Satz des Pythagoras:

$$\overline{TS}^2 + \overline{RT}^2 = \overline{RS}^2 \quad \left| -\overline{TS}^2 \right.$$

$$\overline{RT}^2 = \overline{RS}^2 - \overline{TS}^2 \quad \left| \sqrt{} \right.$$

$$\overline{RT} = \sqrt{\overline{RS}^2 - \overline{TS}^2}$$

$$\overline{RT} \approx \sqrt{6{,}81^2 - 6{,}03^2}$$

$$\overline{RT} \approx 3{,}16 \text{ cm}$$

(6) Berechnung der Höhe h_P des Prismas:

$h_P = \overline{AR} + \overline{RT}$

$h_P \approx 14{,}2 + 3{,}16$

$h_P \approx 17{,}36$ cm

hutt lernhilfen

hutt.lernhilfen ist eine Marke der

Bergmoser + Höller
Verlag AG

Karl-Friedrich-Str. 76
52072 Aachen
DEUTSCHLAND
T 0241-93888-123
F 0241-93888-188
E kontakt@buhv.de
www.buhv.de

Umsatzsteuer-Id.Nr.: DE 123600266
Verkehrsnummer: 10508
Handelsregister Aachen HRB 8580

Vorstand:
Andreas Bergmoser
Peter Tiarks

Aufsichtsratsvorsitz:
Holger Knapp

Autor der Lösungen:
Joachim Krick (Mathematik)

Lektorat:
Kevin Koch, Svenja Lückerath,
Antonia Neher

Ausgabe 2022/2023