Teil A1 (Pflichtteil)

Aufgabe 1

Bestimmung des Quadervolumens V_{Qu}:

$V_{Qu} = a \cdot b \cdot c$

$V_{Qu} = 4 \cdot 3 \cdot 2$

$V_{Qu} = 24\ \text{cm}^3$

Bestimmung der Höhe der Pyramide:

$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ (G ist dabei der Flächeninhalt der quadratischen Grundfläche.)

$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot h$

$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot h$

$V_{Pyr} = 3 \cdot h$

Da das Quadervolumen und das Volumen der Pyramide gleich groß sind, gilt:

$3 \cdot h = 24 \qquad | :3$

$h = 8\ \text{cm}$

Die gesuchte Höhe der Pyramide ist folglich h = 8 cm.

Aufgabe 2

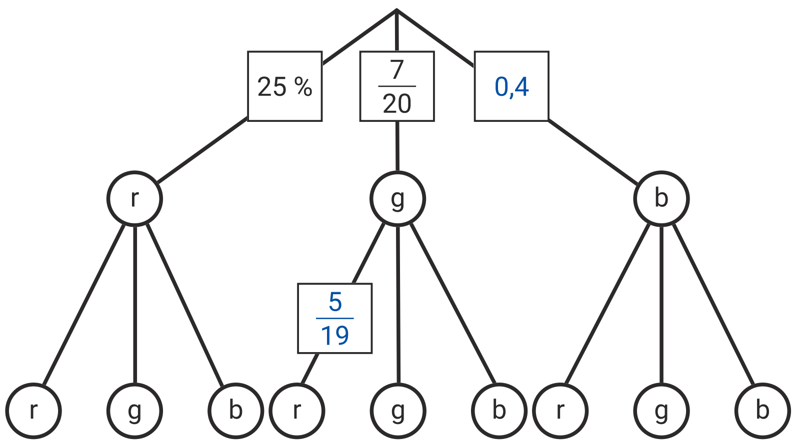
Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsangabe im oberen leeren Feld:

25 % = 0,25; $\frac{7}{20} = \frac{35}{100} = 0{,}35$;

Da die Gesamtwahrscheinlichkeit aller drei Felder in der ersten Stufe 1 (bzw. 100 %) sein muss, gilt für die Wahrscheinlichkeit im oberen leeren Feld: $1 - 0{,}25 - 0{,}35 = 0{,}4$ $\left(= \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 40\ \%\right)$.

Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsangabe im unteren leeren Feld:

Die Anzahl an roten Kugeln beträgt zu Beginn: 25 % (= $\frac{1}{4}$ von 20 Kugeln insgesamt, also 5 rote Kugeln).
Die Wahrscheinlichkeit, im zweiten Zug ohne Zurücklegen der ersten gezogenen grünen Kugel eine rote Kugel zu ziehen, beträgt: $\frac{5}{19}$, da im zweiten Zug insgesamt nur noch 19 Kugeln im Behälter liegen, von denen 5 rot sind.



Aufgabe 3

(A) $0{,}0025 \cdot 10^6 = 0{,}0025 \cdot 1\,000\,000 = 2500$

(B) $0{,}025 \cdot 10^4 = 0{,}025 \cdot 10\,000 = 250$

(C) $2{,}5 \cdot 10^5 = 2{,}5 \cdot 100\,000 = 250\,000$

(D) $250 \cdot 10^2 = 250 \cdot 100 = 25\,000$

Ein Vergleich der vier Terme ergibt, dass der Term (C) den größten Wert hat.

Aufgabe 4

a) Im ersten Muster gibt es insgesamt 8 Kärtchen. Davon befindet sich jeweils eines an den äußersten vier Ecken des Quadrats und jeweils eines zwischen diesen vier Ecken, also $4 + 4 \cdot 1 = 8$. Von einem Muster zum nächsten kommen immer insgesamt 4 weitere Kärtchen hinzu, und zwar immer jeweils eines an den vier Seiten des Quadrats. Das heißt, dass das 6. Muster aus $4 + 4 \cdot 6 = 28$ Kärtchen besteht, denn es kommen zu den 4 Kärtchen an den äußersten vier Ecken des Quadrats bis zum 6. Muster insgesamt noch sechsmal 4 Kärtchen hinzu.

b)

	richtig	falsch
$s = 4n + 4$	☒	☐
$s = 2n + 4$	☐	☒
$s = 4n + 2$	☐	☒
$s = (n + 2)^2 - n^2$	☒	☐

Erläuterung zur letzten (richtigen) Formel: $(n + 2)^2 - n^2 = n^2 + 4n + 4 - n^2 = 4n + 4$

Aufgabe 5

	positiv	negativ
sin 25°	☒	☐
sin 125°	☒	☐
sin 225°	☐	☒

Aufgabe 6

a) Das Minimum (30) und das Maximum (150) hat Selina richtig in den Boxplot eingetragen.

Berechnung des unteren Quartils q_u: $17 \cdot \frac{1}{4} = 4{,}25$. Rangplatz von q_u ist 5. Folglich gilt: $q_u = 50$

Berechnung des Zentralwertes z: $17 \cdot \frac{1}{2} = 8{,}5$. Rangplatz von z ist 9. Folglich gilt: $z = 60$

Berechnung des oberen Quartils q_o: $17 \cdot \frac{3}{4} = 12{,}75$. Rangplatz von q_o ist 13. Folglich gilt: $q_o = 80$

Offensichtlich hat Selina das obere Quartil q_o falsch berechnet, denn in ihrem Boxplot ist es der Wert 90, obwohl es tatsächlich den Wert 80 hat.

b) Selinas Behauptung ist richtig. Der Grund ist, dass nicht nur ein Wert (40) hinzukommt, der kleiner als der ursprüngliche Zentralwert (60) ist, sondern auch ein Wert (120), der größer als der ursprüngliche Zentralwert ist. Dadurch behält der ursprüngliche Zentralwert seine Position genau in der Mitte der geordneten Rangliste bei und ist somit auch der Zentralwert des erweiterten Datensatzes.

Aufgabe 7

a) Für den prozentualen Anteil p gilt:

$$\frac{p}{100} = \frac{W}{G}$$
$$\frac{p}{100} = \frac{80}{400}$$
$$\frac{p}{100} = \frac{20}{100}$$
$$p = 20\ \%$$

b) Berechnung der Anzahl an Frauen, die mit dem Auto fahren:

$$W = G \cdot \frac{p}{100}$$
$$W = 150 \cdot \frac{40}{100}$$
$$W = 150 \cdot \frac{2}{5}$$
$$W = 60$$

Von den 400 befragten Personen sind 60 Frauen, die mit dem Auto fahren.

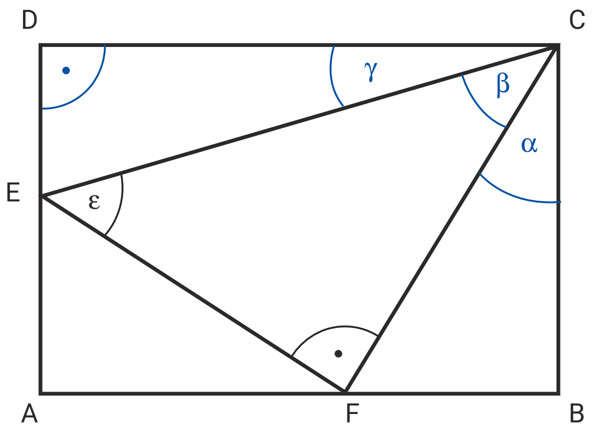
Berechnung der Anzahl an Frauen, die mit einem Elektroauto fahren:

$$W = G \cdot \frac{p}{100}$$
$$W = 60 \cdot \frac{15}{100}$$
$$W = 60 \cdot \frac{3}{20}$$
$$W = 9$$

Von den 400 befragten Personen sind 9 Frauen, die mit einem Elektroauto fahren.

Teil A2 (Pflichtteil)

Aufgabe 1



(1) Bestimmung von $\overline{FC}$ im rechtwinkligen Dreieck EFC:

$\sin(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\overline{FC}}{\overline{CE}}$

$\sin(49°) = \frac{\overline{FC}}{7{,}2}$ $\quad | \cdot 7{,}2$

$7{,}2 \cdot \sin(49°) = \overline{FC}$

$\overline{FC} \approx 5{,}43$ cm

(2) Bestimmung von α im rechtwinkligen Dreieck FBC:

$\cos(\alpha) = \frac{\overline{BC}}{\overline{FC}}$

$\cos(\alpha) = \frac{4{,}6}{5{,}43}$

$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{4{,}6}{5{,}43}\right)$

$\alpha \approx 32{,}1°$

(3) Bestimmung von β im rechtwinkligen Dreieck EFC:

$\beta = 180° - 90° - 49°$ (Winkelsummensatz im Dreieck)

$\beta = 41°$

(4) Bestimmung von γ:

Da der Winkel im Punkt C im Rechteck ABCD eine Größe von 90° hat, gilt für γ:

$\gamma = 90° - \alpha - \beta$

$\gamma = 90° - 32{,}1° - 41°$

$\gamma = 16{,}9°$

(5) Bestimmung von $\overline{DC}$ im rechtwinkligen Dreieck ECD:

$$\cos(\gamma) = \frac{\overline{DC}}{\overline{CE}}$$

$$\cos(16{,}9°) = \frac{\overline{DC}}{7{,}2} \qquad | \cdot 7{,}2$$

$$7{,}2 \cdot \cos(16{,}9°) = \overline{DC}$$

$$\overline{DC} \approx 6{,}9 \text{ cm}$$

(6) Bestimmung des Umfangs des Rechtecks ABCD:

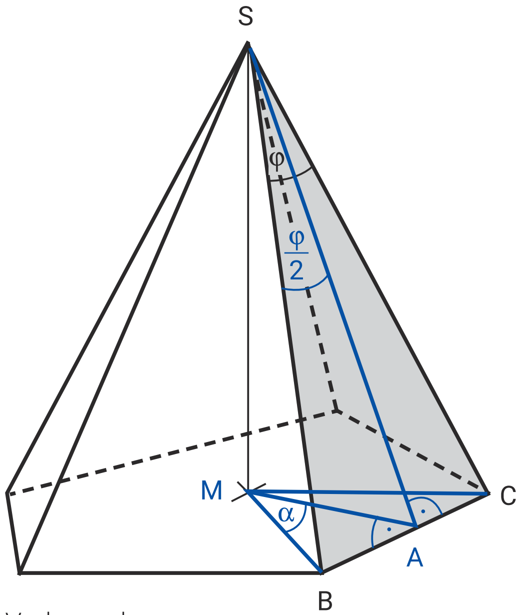
$u = 2 \cdot \overline{BC} + 2 \cdot \overline{DC}$

$u = 2 \cdot 4{,}6 + 2 \cdot 6{,}9$

$u = 23$ cm

Der Umfang des Vierecks ABCD beträgt 23 cm.

Aufgabe 2



Vorbemerkung:
Da es sich um eine regelmäßige Pyramide handelt, sind die Dreiecke BCS und BCM gleichschenklig. In gleichschenkligen Dreiecken gilt generell, dass die Höhe auf die Basis jeweils den Winkel halbiert, der der Basis gegenüberliegt. Außerdem gilt, dass die Höhe auf die Basis eben diese Basis halbiert. Diese Zusammenhänge werden in den folgenden Lösungsschritten mehrmals verwendet.

(1) Bestimmung von $\overline{AS}$ im rechtwinkligen Dreieck BAS:

$$\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\overline{AS}}{\overline{BS}}$$

$$\cos\left(\frac{40°}{2}\right) = \frac{\overline{AS}}{12} \qquad | \cdot 12$$

$$12 \cdot \cos(20°) = \overline{AS}$$

$$\overline{AS} \approx 11{,}28 \text{ cm}$$

(2) Bestimmung von $\overline{AB}$ im rechtwinkligen Dreieck BAS:

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BS}}$$

$$\sin\left(\frac{40°}{2}\right) = \frac{\overline{AB}}{12} \qquad | \cdot 12$$

$$12 \cdot \sin(20°) = \overline{AB}$$

$$\overline{AB} \approx 4{,}10 \text{ cm}$$

(3) Bestimmung von α (siehe Zeichnung):

Da es sich um eine regelmäßige fünfseitige Pyramide handelt, kann die Grundfläche in fünf kongruente, gleichschenklige Dreiecke zerlegt werden. Eines dieser Dreiecke in das Dreieck BCM. Der Winkel am Punkt M in diesem Dreieck BCM muss folglich ein Fünftel eines kompletten Kreises betragen, also 360° : 5 = 72°. Da die Höhe $\overline{AM}$ im gleichschenkligen Dreieck BCM den 72°-Winkel halbiert, gilt:

$\alpha = 72° : 2 = 36°$

(4) Bestimmung von $\overline{MA}$ im rechtwinkligen Dreieck BAM:

$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{AB}}{\overline{MA}}$$

$$\tan(36°) = \frac{4{,}1}{\overline{MA}} \qquad | \cdot \overline{MA}$$

$$\overline{MA} \cdot \tan(36°) = 4{,}10 \qquad | : \tan(36°)$$

$$\overline{MA} = \frac{4{,}10}{\tan(36°)}$$

$$\overline{MA} \approx 5{,}64 \text{ cm}$$

(5) Bestimmung von $\overline{MS}$ (= Höhe der Pyramide) im rechtwinkligen Dreieck BSM:

$$\overline{MA}^2 + \overline{MS}^2 = \overline{AS}^2 \text{ (Pythagoras)} \qquad | - \overline{MA}^2$$

$$\overline{MS}^2 = \overline{AS}^2 - \overline{MA}^2 \qquad | \sqrt{}$$

$$\overline{MS} = \sqrt{\overline{AS}^2 - \overline{MA}^2}$$

$$\overline{MS} \approx \sqrt{11{,}28^2 - 5{,}64^2}$$

$$\overline{MS} \approx 9{,}77 \text{cm}$$

(6) Bestimmung des Grundflächeninhalts G der Pyramide:
Da die Grundfläche in fünf kongruente Dreiecke zerlegt werden kann, gilt für den Grundflächeninhalt, dass dieser fünfmal so groß ist wie der Flächeninhalt des Dreiecks BCM:

$G = 5 \cdot 0{,}5 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{MA}$ (Beachten Sie: $0{,}5 \cdot \overline{BC} = \overline{AB}$)

$G = 5 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{MA}$

$G = 5 \cdot 4{,}1 \cdot 5{,}64$

$G = 115{,}62 \text{ cm}^2$

(7) Bestimmung des Volumens der Pyramide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot \overline{MS}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 115{,}62 \cdot 9{,}77$$

$$V = 376{,}54 \text{ cm}^3$$

Aufgabe 3

Zuordnung der Graphen und Funktionsgleichungen:

Graph p_3 gehört zu Funktionsgleichung (A). Begründung: Der Scheitelpunkt der zur Funktionsgleichung (A) gehörenden Parabel hat die Koordinaten (0 | 3) und dies sind gerade die Koordinaten des Scheitelpunkts von p_3.

Graph p_2 gehört zu Funktionsgleichung (B). Begründung: Die Funktionsgleichung (B) ist in Scheitelform gegeben. Die aus dieser Scheitelform abzulesende x-Koordinate des zugehörigen Scheitelpunkts hat den Wert 3 und dies ist gerade die aus dem Graphen p_2 abzulesende x-Koordinate des Scheitelpunkts.

Graph p_1 gehört zu Funktionsgleichung (C). Begründung: Nach dem Ausschlussprinzip bleibt nur noch diese Zuordnung übrig.

Bestimmung des Wertes für e in Funktionsgleichung (B):

Am Graphen p_2 lassen sich die Nullstellen 1 und 5 ablesen. Setzt man eine der beiden (hier: 5) in die Funktionsgleichung (B) ein, so ergibt sich:

$$(5-3)^2 + e = 0$$

$$4 + e = 0$$

$$e = -4$$

Bestimmung der Funktionsgleichung der Gerade g:

Es gilt: S_2 (3 | -4) und P (0 | 2). Mit diesen beiden Punkten wird zunächst die Steigung m der Geraden g bestimmt:

$$m = \frac{2-(-4)}{0-3} = \frac{6}{-3} = -2$$

Damit gilt für g: y = -2x + c. Nun setzt man einen der beiden Punkte (hier: P) in diese Geradengleichung ein. Dann ergibt sich:

$$2 = -2 \cdot 0 + c$$

$$c = 2$$

Damit gilt für die Funktionsgleichung der Geraden g: y = -2x + 2.

Aufgabe 4

$$P_{(\text{zwei portugiesische Spieler})} = \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} \approx 5{,}3\ \%$$

$$P_{(\text{höchstens ein deutscher Spieler})} = 1 - P_{(\text{zwei deutsche Spieler})} = 1 - \frac{6}{20} \cdot \frac{5}{19} \approx 92{,}1\ \%$$

$$P_{(\text{kein französischer Spieler})} = P_{(\text{zwei der übrigen 11 Spieler})} = \frac{11}{20} \cdot \frac{10}{19} \approx 28{,}9\ \%$$

Aufgabe 5

Lösen Sie die Gleichung.

$$(x-3)(1+x)-(x-4)^2 = x(x-3)-1 \quad | \text{ Klammern ausmultiplizieren}$$

$$x+x^2-3-3x-(x^2-8x+16) = x^2-3x-1 \quad | \text{ Minus-Klammer auflösen}$$

$$x+x^2-3-3x-x^2+8x-16 = x^2-3x-1 \quad | \text{ Vereinfachen}$$

$$6x-19 = x^2-3x-1 \quad | -6x+19$$

$$0 = x^2-9x+18 \quad | \text{ Lösungsformel}$$

$$x_{1,2} = -\frac{-9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-9}{2}\right)^2-18}$$

$$x_{1,2} = 4{,}5 \pm \sqrt{20{,}25-18}$$

$$x_{1,2} = 4{,}5 \pm \sqrt{20{,}25}$$

$$x_{1,2} = 4{,}5 \pm 1{,}5$$

$$x_1 = 4{,}5+1{,}5 = 6$$

$$x_2 = 4{,}5-1{,}5 = 3$$

Aufgabe 6

Bestimmung des prozentualen Anstiegs der Anzahl an Nutzerinnen und Nutzern von 2020 bis 2022:

Absoluter Anstieg der Nutzerzahlen von 2020 bis 2022: 420 000 – 340 000 = 80 000
Prozentualer Anstieg:

$$\frac{p}{100} = \frac{80\,000}{340\,000}$$

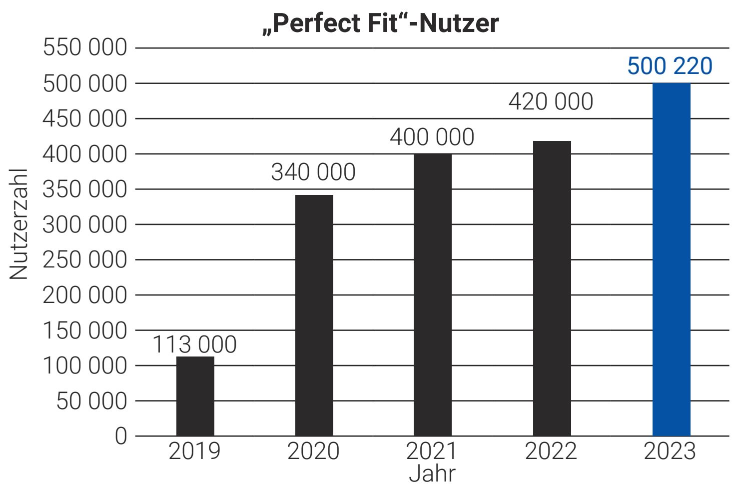
$$\frac{p}{100} = \frac{8}{34}$$

$$p = \frac{8}{34} \cdot 100$$

$$p \approx 23{,}5\ \%$$

Die Anzahl der Nutzer/-innen ist von 2020 bis 2024 um etwa 23,5 % gestiegen.

Bestimmung des Wertes für das Jahr 2023 und Einzeichnen der zugehörigen Säule:
19,1 % von 420 000 = (420 000 : 100) · 19,1 = 80 220. Im Jahr 2023 gab es folglich 80 220 mehr Nutzer/-innen als im Jahr 2022. Die Gesamtzahl an Nutzerinnen und Nutzern im Jahr 2023 betrug somit 420 000 + 80220 = 500 220.



Bestimmung des prozentualen Anteils der Mädchen an den 10- bis 19-jährigen Nutzerinnen und Nutzern:

25 % aller Nutzer/-innen waren im Jahr 2022 zwischen 10 und 19 Jahre alt:
25 % von 420 000 = 105 000
Von diesen 105 000 Nutzerinnen und Nutzern zwischen 10 und 19 Jahren waren 47 500 Mädchen:

$$\frac{p}{100} = \frac{47\,000}{105\,000}$$

$$\frac{p}{100} = \frac{475}{1050}$$

$$p = \frac{475}{1050} \cdot 100$$

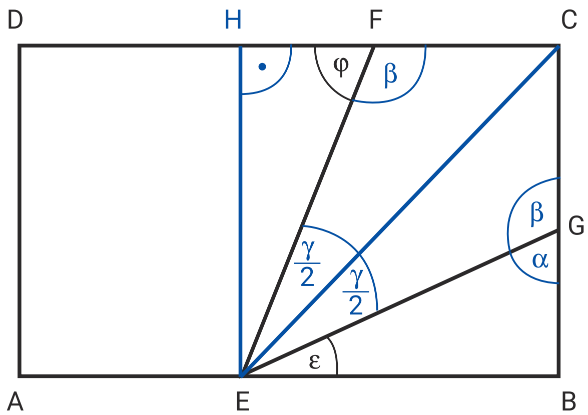
$$p \approx 45{,}2\ \%$$

Der prozentuale Anteil der Mädchen an den 10- bis 19-jährigen Nutzerinnen und Nutzern im Jahr 2022 betrug 45,2 %.

Teil B (Wahlteil)

Aufgabe 1

a)



Vorbemerkung:
Da das Viereck EGCF ein Drachenviereck ist, ist die Gerade durch E und C Spiegelachse des Drachens. Daraus folgen zwei wichtige Zusammenhänge. Erstens halbiert diese Achse den Winkel γ und zweitens sind die beiden gegenüberliegenden Winkel bei G und F gleich groß. Deshalb haben diese beiden Winkel in der Skizze dieselbe griechische Bezeichnung β.

Berechnung des Winkels φ:

Im Dreieck EBG gilt:

$\alpha = 180° - 90° - \varepsilon$ (Winkelsumme im Dreieck)

$\alpha = 90° - 20°$

$\alpha = 70°$

Da α und β Nebenwinkel sind, gilt:

$\beta = 180° - \alpha$

$\beta = 180° - 70°$

$\beta = 110°$

Da auch φ und β Nebenwinkel sind, gilt:

$\varphi = 180° - \beta$

$\varphi = 180° - 110°$

$\varphi = 70°$

Berechnung des Umfangs des Vierecks AEFD:

Bestimmung des Winkels γ im Drachenviereck EGCF:

$\gamma + 90° + 2 \cdot \beta = 360°$ (Winkelsumme im Viereck)

$\gamma + 90° + 2 \cdot 110° = 360°$

$\gamma + 310° = 360°$ | – 310°

$\gamma = 50°$

Bestimmung von $\overline{BC}$ (= $\overline{AD}$ = $\overline{EH}$) im rechtwinkligen Dreieck EBC:

$\tan\left(\varepsilon + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$

$\tan(20° + 25°) = \frac{\overline{BC}}{5{,}6}$ | · 5,6

$\tan(45°) \cdot 5{,}6 = \overline{BC}$

$\overline{BC} = 5{,}6 \text{ cm}$

Bestimmung von $\overline{EF}$ im rechtwinkligen Dreieck EFH:

$\sin(\varphi) = \frac{\overline{EH}}{\overline{EF}}$

$\sin(70°) = \frac{5{,}6}{\overline{EF}}$ | · $\overline{EF}$

$\sin(70°) \cdot \overline{EF} = 5{,}6$ | : sin(70°)

$\overline{EF} = \frac{5{,}6}{\sin(70°)}$

$\overline{EF} \approx 5{,}96 \text{ cm}$

Bestimmung von $\overline{HF}$ im rechtwinkligen Dreieck EFH:

$\cos(\varphi) = \frac{\overline{HF}}{\overline{EF}}$

$\cos(70°) = \frac{\overline{HF}}{5{,}96}$ | · 6

$\cos(70°) \cdot 5{,}96 = \overline{HF}$

$\overline{HF} \approx 2{,}04 \text{ cm}$

Bestimmung des Umfangs des Vierecks AEFD:

$\overline{AE} = \overline{AB} - \overline{BE}$

$\overline{AE} = 9{,}4 - 5{,}6$

$\overline{AE} = 3{,}8 \text{ cm}$

$u = \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{HF} + \overline{HD} + \overline{AD}$ (Beachten Sie: $\overline{AE} = \overline{HD}$ und $\overline{AD} = \overline{BC}$)

$u = 3{,}8 + 5{,}96 + 2{,}04 + 3{,}8 + 5{,}6$

$u = 21{,}2 \text{ cm}$

Der Umfang des Vierecks AEFD beträgt etwa 21,2 cm.

b) Berechnung der Funktionsgleichungen von p_1 und p_2:

Da die Parabel p_1 eine nach oben geöffnete verschobene Normalparabel mit dem Scheitelpunkt S_1 (1 | 1) ist, gilt für ihre Funktionsgleichung: p_1: $y = (x - 1)^2 + 1$.

Die x-Koordinate x_S des Scheitelpunkts S_2 von p_2 ist der Mittelwert der beiden Nullstellen -6 und -2: $x_S = (-6 + (-2)) : 2 = -8 : 2 = -4$. Da p_2 eine nach oben geöffnete verschobene Normalparabel ist, lautet die Scheitelpunktform von p_2: $y = (x + 4)^2 + e$. Um e zu bestimmen, setzt man einen der beiden Schnittpunkte mit der x-Achse, also N_1 oder N_2 (hier N_2), in diese Scheitelpunktform ein:

$0 = (-2 + 4)^2 + e$

$0 = 2^2 + e$

$0 = 4 + e \qquad | - 4$

$e = -4$

Damit lautet die Funktionsgleichung von p_2: $y = (x + 4)^2 - 4$.

Bestimmung der Funktionsgleichung der Gerade g:

Es gilt: S_1 (1 | 1) und A (2 | -1). Mit diesen beiden Punkten wird zunächst die Steigung m der Geraden g bestimmt:

$$m = \frac{-1 - 1}{2 - 1} = \frac{-2}{1} = -2$$

Damit gilt für g: $y = -2x + c$. Nun setzt man einen der beiden Punkte (hier: A) in diese Geradengleichung ein. Dann ergibt sich:

$-1 = -2 \cdot 2 + c$

$-1 = -4 + c \qquad | + 4$

$c = 3$

Damit gilt für die Funktionsgleichung der Geraden g: $y = -2x + 3$.

Bestimmung der Entfernung zwischen S_1 und S_2:

Nach dem Satz des Pythagoras berechnet sich die Entfernung d zwischen zwei Punkten $P(x_1 | y_1)$ und $Q(x_2 | y_2)$ mithilfe der folgenden Formel:

$$d = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

Für die beiden Punkte S_1 (1 | 1) und S_2 (-4 | -4) gilt dann:

$d = \sqrt{(-4 - 1)^2 + (-4 - 1)^2}$

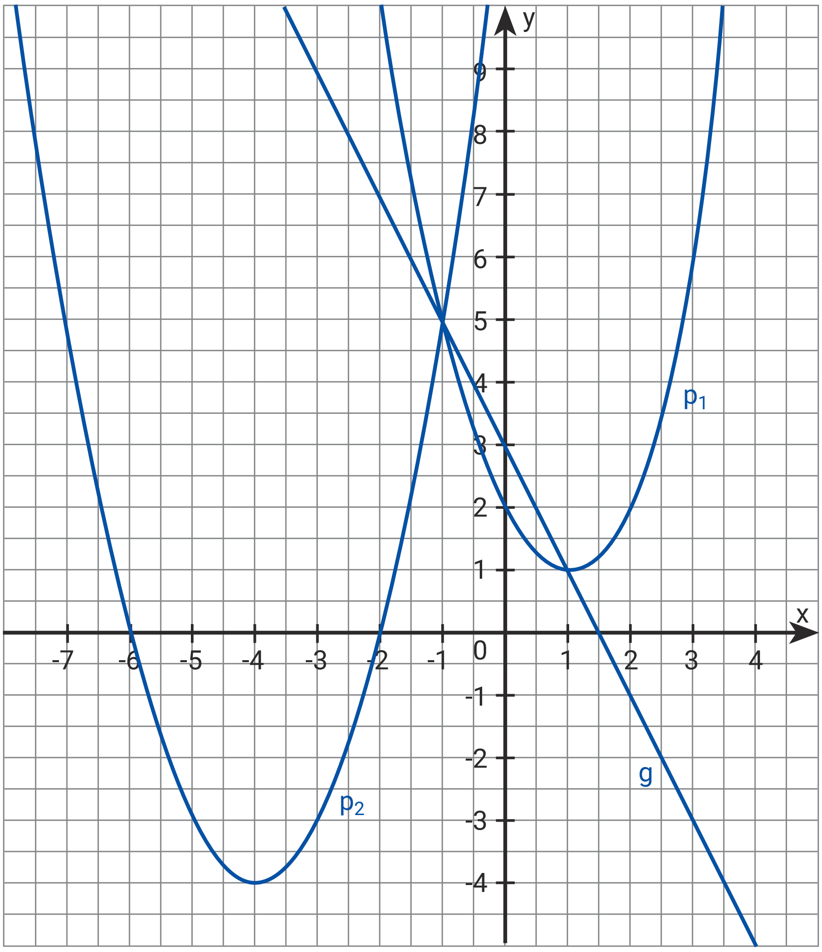
$d = \sqrt{25 + 25}$

$d = \sqrt{50}$

$d \approx 7{,}07$ cm

Die Entfernung zwischen den beiden Scheitelpunkten beträgt etwa 7,07 cm.

Überprüfung der Behauptung von Milo und rechnerische Begründung:



Nach Einzeichnen der beiden Parabeln p_1 und p_2 sowie der Gerade g scheint es so zu sein, dass Milos Behauptung stimmt. Laut Grafik könnte der Punkt (-1 | 5) der gemeinsame Schnittpunkt der beiden Parabeln und der Geraden sein. Allerdings kann man sich beim Ablesen aus Grafiken nie ganz sicher sein, dass die Lösung absolut exakt ist. Dazu bedarf es einer rechnerischen Lösung.

Rechnerische Begründung:

Berechnung des Schnittpunkts der beiden Parabeln p_1 und p_2:

$$(x-1)^2 + 1 = (x+4)^2 - 4$$

$$x^2 - 2x + 1 + 1 = x^2 + 8x + 16 - 4$$

$$x^2 - 2x + 2 = x^2 + 8x + 12 \qquad | - x^2 \quad | - 8x \quad | - 2$$

$$-10x = 10 \qquad | : (-10)$$

$$x = -1$$

Einsetzen des x-Werts -1 in eine der beiden Parabelgleichungen (hier: p_1) ergibt:

$y = (-1 - 1)^2 + 1$

$y = (-2)^2 + 1$

$y = 4 + 1$

$y = 5$

Damit ist der Schnittpunkt der beiden Parabeln der Punkt R (-1 | 5). Nun muss noch rechnerisch überprüft werden, ob R auf der Geraden g liegt. Einsetzen des Punktes R in die Geradengleichung von g ergibt:

$y = -2x + 3$

$5 = -2 \cdot (-1) + 3$

$5 = 2 + 3$

$5 = 5$

Da dies eine wahre Aussage ist, liegt R auf der Geraden g. Damit ist nun vollständig begründet, dass der gemeinsame Schnittpunkt von p_1, p_2 und g der Punkt R (-1 | 5) ist.

Aufgabe 2

a) Bestimmung der Koordinaten der Punkte A und B:

Punkt A:

$-x - 3 = 0 \qquad | +3$

$-x = 3 \qquad | :(-1)$

$x = -3$

Damit gilt: A (-3 | 0)

Punkt B:
Der y-Achsenabschnitt der Geraden g ist -3. Folglich gilt: B(0 | -3).

Bestimmung der Funktionsgleichung von p sowie der Koordinaten ihres Scheitelpunkts S:
Bestimmung der Funktionsgleichung von p:

Ansatz: $y = x^2 + bx + c$

Einsetzen der Koordinaten von B ergibt:

$-3 = 0^2 + b \cdot 0 + c$

$-3 = c$

Einsetzen der Koordinaten von A ergibt:

$(-3)^2 + b \cdot (-3) - 3 = 0$

$9 - 3b - 3 = 0$

$6 - 3b = 0 \qquad | -6$

$-3b = -6 \qquad | :(-3)$

$b = 2$

Damit gilt für die Funktionsgleichung von p: $y = x^2 + 2x - 3$.

Bestimmung der Koordinaten des Scheitelpunktes S:

$y = x^2 + 2x - 3 \qquad$ | quadratische Ergänzung

$y = x^2 + 2x + 1^2 - 1^2 - 3$

$y = (x + 1)^2 - 1 - 3$

$y = (x + 1)^2 - 4$

Aus dieser Scheitelpunktform der Parabelgleichung können die Koordinaten des Scheitelpunktes abgelesen werden: S (-1 | -4).

Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks PSQ:

Bestimmung der jeweiligen x-Koordinate der Punkte P (x_P | 12) und Q (x_Q | 12):

$x^2 + 2x - 3 = 12$ | -12

x2 + 2x – 15 = 0 | Lösungsformel

$$x_{1,2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-15)}$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 15}$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{16}$$

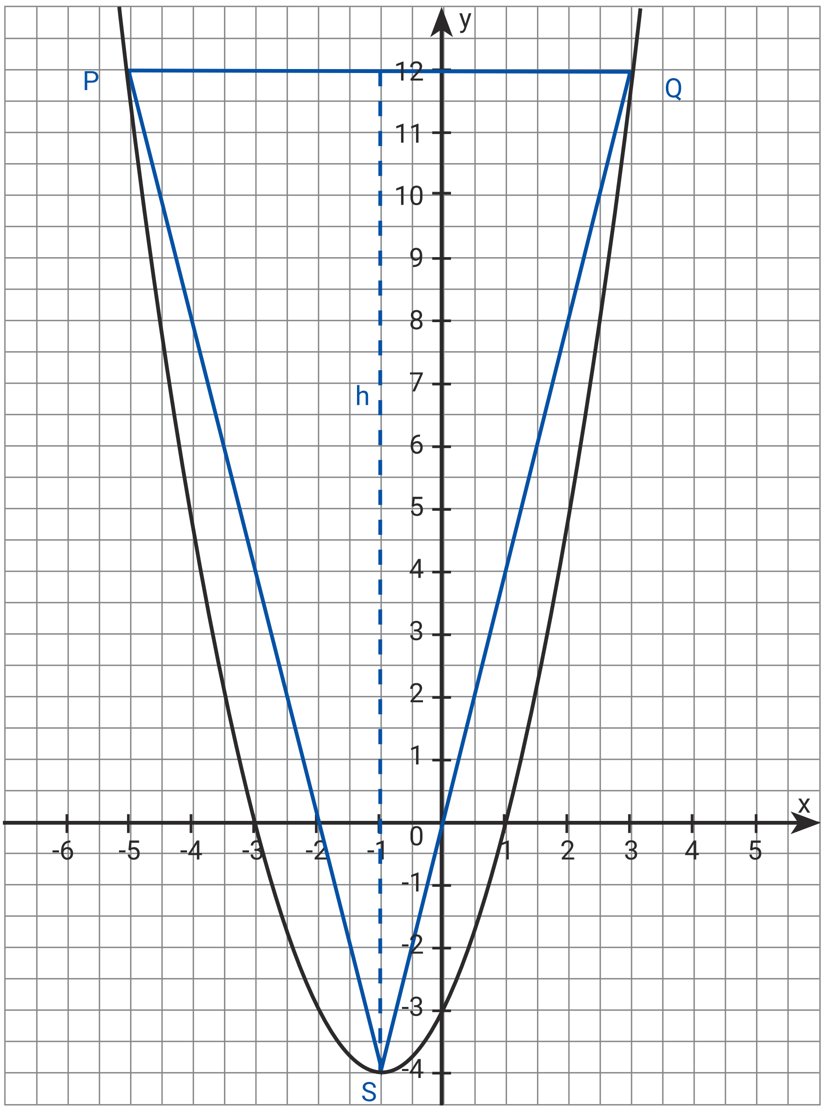
$$x_{1,2} = -1 \pm 4$$

$$x_1 = -1 + 4 = 3$$

$$x_2 = -1 - 4 = -5$$

Damit gilt für die beiden Punkte P und Q: P (-5 | 12) und Q (3 | 12)

Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks PSQ:



Wählt man als Grundseite des Dreiecks PSQ die Strecke $\overline{PQ}$ (= 8 cm; siehe Skizze), dann hat die zur dieser Grundseite gehörende Höhe h die Länge 16 cm (siehe Skizze).
Der Flächeninhalt des Dreiecks PSQ berechnet sich dann wie folgt:

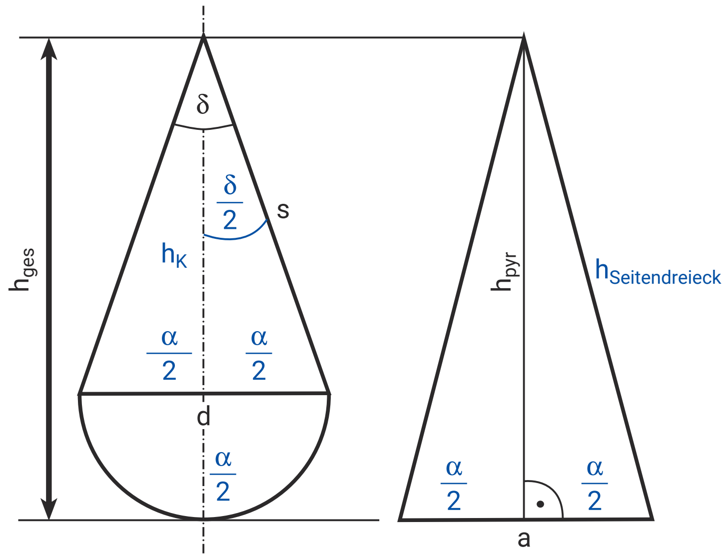
$A = 0{,}5 \cdot \overline{PQ} \cdot h$

$A = 0{,}5 \cdot 8 \cdot 16$

$A = 64\ \text{cm}^2$

b) Berechnung der Differenz der Oberflächeninhalte der beiden Körper:

Erläuterungen zu den Ergänzungen in der Grafik:
Da es sich um einen Achsenschnitt des zusammengesetzten Körpers auf der linken Seite handelt, wird der Winkel δ durch die Höhe h_K des Kegels halbiert. Laut Aufgabentext gilt d = a. Deshalb hat der Radius des Kegels und der Halbkugel die Länge $\frac{a}{2}$. Dieser Radius kann beim Achsenschnitt des zusammengesetzten Körpers dreimal eingetragen werden (siehe Skizze). Bei der Skizze auf der rechten Seite handelt es sich um einen Parallelschnitt einer quadratischen Pyramide. Daraus kann man zwei wichtige Schlussfolgerungen ziehen. Erstens halbiert die Höhe h_{Pyr} die Grundkante a. Zweitens ist die mit $h_{Seitendreieck}$ bezeichnete Strecke die Höhe eines der vier kongruenten Seitendreiecke, die Teil der Oberfläche der Pyramide sind.



Bestimmung der Grundkantenlänge a mit Hilfe der Grafik auf der linken Seite:

$$\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{\frac{\alpha}{2}}{s}$$

$$\sin\left(\frac{42°}{2}\right) = \frac{\frac{\alpha}{2}}{14{,}4}$$

$$\sin(21°) = \frac{\frac{\alpha}{2}}{14{,}4} \qquad | \cdot 14{,}4$$

$$\sin(21°) \cdot 14{,}4 = \frac{\alpha}{2} \qquad | \cdot 2$$

$$\sin(21°) \cdot 14{,}4 \cdot 2 = a$$

$$a \approx 10{,}32\ \text{cm}$$

Bestimmung der Kegelhöhe h_K:

$$\cos\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{h_K}{s}$$

$$\cos(21°) = \frac{h_K}{14{,}4} \qquad | \cdot 14{,}4$$

$$\cos(21°) \cdot 14{,}4 = h_K$$

$$h_K \approx 13{,}44 \text{ cm}$$

Bestimmung der Gesamthöhe h_{ges}:

$$h_{ges} = h_K + \frac{a}{2}$$

$$h_{ges} = 13{,}44 + \frac{10{,}32}{2}$$

$$h_{ges} = 18{,}6 \text{ cm}$$

Bestimmung der Mantelfläche M_K des Kegels:

Da der Kreis als Grundfläche des Kegels in diesem zusammengesetzten Körper von außen nicht sichtbar ist, muss hier nur der Flächeninhalt des Kegelmantels M_K berechnet werden:

$$M_K = \pi \cdot r \cdot s$$

$$M_K = \pi \cdot \frac{a}{2} \cdot s$$ (Beachte, dass der Radius des Kegels hier $\frac{a}{2}$ ist.)

$$M_K = \pi \cdot \frac{10{,}32}{2} \cdot 14{,}4$$

$$M_K \approx 233{,}43 \text{ cm}^2$$

Bestimmung des Inhalts der Oberfläche O_H der Halbkugel:

$$O_H = 0{,}5 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$O_H = 0{,}5 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2$$ (Beachte, dass der Radius der Halbkugel hier $\frac{a}{2}$ ist.)

$$O_H = 0{,}5 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{10{,}32}{2}\right)^2$$

$$O_H \approx 167{,}29 \text{ cm}^2$$

Bestimmung des Oberflächeninhalts O_{ZK} des zusammengesetzten Körpers:

$$O_{ZK} = M_K + O_H$$

$$O_{ZK} = 233{,}43 + 167{,}29$$

$$O_{ZK} = 400{,}72 \text{ cm}^2$$

Bestimmung der Höhe $h_{Seitendreieck}$ eines Seitendreiecks der Pyramide:

$$(h_{Seitendreieck})^2 = (h_{Pyr})^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \qquad | \sqrt{}$$

$$h_{Seitendreieck} = \sqrt{(h_{Pyr})^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$ (Beachte, dass laut Grafik $h_{Pyr} = h_{ges}$ gilt.)

$$h_{Seitendreieck} = \sqrt{18{,}6^2 + \left(\frac{10{,}32}{2}\right)^2}$$

$$h_{Seitendreieck} \approx 19{,}3 \text{ cm}$$

Bestimmung des Oberflächeninhalts O_{Pyr} der Pyramide:

$O_{Pyr} = a^2 + 4 \cdot 0{,}5 \cdot a \cdot h_{Seitendreieck}$

$O_{Pyr} = 10{,}32^2 + 4 \cdot 0{,}5 \cdot 10{,}32 \cdot 19{,}3$

$O_{Pyr} \approx 504{,}85 \text{ cm}^2$

(9) Bestimmung der Differenz D von O_{Pyr} und O_{ZK}:

$D = O_{Pyr} - O_{ZK}$

$D = 504{,}85 - 400{,}72$

$D = 104{,}13 \text{ cm}^2$

Die Differenz der Oberflächeninhalte der beiden Körper beträgt etwa $104{,}13 \text{ cm}^2$.

Aufgabe 3

a) Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „zweimal Muschel“:

$P_{(\text{„zweimal Muschel“})} = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{45} = 0{,}0\overline{2} \approx 2{,}2\ \%$

Berechnung des Erwartungswerts für den (Rein-)Gewinn bei diesem Glücksspiel:

$P_{(\text{„zweimal Seestern“})} = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15} = 0{,}0\overline{6} \approx 6{,}7\ \%$

$P_{(\text{„Muschel und Seestern“})}$

$= P_{(\text{„erst Muschel, dann Seestern“})} + P_{(\text{„erst Seestern, dann Muschel“})}$

$= \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{15} = 0{,}1\overline{3} \approx 13{,}3\ \%$

$P_{(\text{„alle übrigen Ereignisse“})} = 1 - \frac{1}{45} - \frac{1}{15} - \frac{2}{15} = 1 - \frac{1}{45} - \frac{3}{45} - \frac{6}{45} = \frac{35}{45} = \frac{7}{9} = 0{,}\overline{7} \approx 77{,}8\ \%$

Erwartungswert (des Reingewinns)

$= \frac{1}{45} \cdot 9{,}00 + \frac{1}{15} \cdot 4{,}00 + \frac{2}{15} \cdot 2{,}50 - 1{,}00 = \frac{9}{45} + \frac{12}{45} + \frac{15}{45} - \frac{45}{45} = -\frac{9}{45} = -\frac{1}{5} = -0{,}20$

Der (negative) Erwartungswert von -0,20 € bedeutet, dass ein(e) Spieler(in) im Durchschnitt auf lange Sicht pro Spiel einen Verlust von 0,20 € erzielt.

Berechnung des zu verändernden Gewinns für „zweimal Muschel“, damit das Spiel fair wird:
Bezeichnet man den zu verändernden Gewinn für „zweimal Muschel“ mit der Variablen x, dann kann man einen Term für den Erwartungswert (des Reingewinns) aufstellen:

$\frac{1}{45} \cdot x + \frac{1}{15} \cdot 4{,}00 + \frac{2}{15} \cdot 2{,}50 - 1{,}00$

Damit das Spiel fair wird, muss der Term für den Erwartungswert gleich 0 gesetzt werden und die daraus resultierende Gleichung nach x aufgelöst werden:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{45} \cdot x + \frac{1}{15} \cdot 4{,}00 + \frac{2}{15} \cdot 2{,}50 - 1{,}00 &= 0 \\
\frac{x}{45} + \frac{12}{45} + \frac{15}{45} - \frac{45}{45} &= 0 \qquad | \cdot 45 \\
x + 12 + 15 - 45 &= 0 \\
x - 18 &= 0 \qquad | + 18 \\
x &= 18
\end{aligned}
$$

Der Gewinn für „zweimal Muschel“ muss 18 € sein, damit das Spiel fair wird.

Prüfungen

b) Bestimmung der Funktionsgleichung für die Parabel (Vorderseite der Tennishalle):

Der Ansatz $y = ax^2 + c$ für die Parabel bedeutet, dass die y-Achse durch den Scheitelpunkt S geht. Da die Halle eine maximale Höhe von 12 m hat, hat S die Koordinaten (0 | 12). Damit lautet die (vorläufige) Funktionsgleichung $y = ax^2 + 12$. Da die Breite der Halle am Boden 40 m beträgt, hat die quadratische Funktion die beiden Nullstellen $x_1 = -20$ und $x_2 = 20$. Das heißt, dass die Parabel durch die Punkte A (-20 | 0) und B (20 | 0) verläuft. Setzt man die Koordinaten eines dieser beiden Punkte (hier B) in die Funktionsgleichung $y = ax^2 + 12$ ein, so ergibt sich:

$a \cdot 20^2 + 12 = 0$

$400a + 12 = 0 \qquad | - 12$

$400a = -12 \qquad | : 400$

$a = -0{,}03$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $y = -0{,}03x^2 + 12$.

Berechnung des Flächeninhalts der Fensterfläche für Vorschlag 1:

Ansatz:

$-0{,}03x^2 + 12 = 10 \qquad | - 12$

$-0{,}03x^2 = -2 \qquad | : (-0{,}03)$

$x^2 = 66{,}67 \qquad | \sqrt{}$

$x_1 \approx -8{,}2; \; x_2 \approx 8{,}2$

Der Flächeninhalt A1 der Fensterfläche für Vorschlag 1 berechnet sich wie folgt:

$A_1 = 16{,}4 \cdot 10$

$A_1 = 164 \text{ m}^2$

Berechnung der größtmöglichen Höhe der Fensterfläche für Vorschlag 2:

Wenn das Fenster eine Breite von 10 m haben soll, dann sind die y-Koordinaten der beiden Punkte P (-5 | y_P) und Q (5 | y_Q) gesucht. Wegen der Symmetrie der Parabel zur y-Achse gilt außerdem $y_P = y_Q$. Folglich kann folgender Ansatz gewählt werden:

$y_Q = -0{,}03 \cdot 5^2 + 12$

$y_Q = -0{,}75 + 12$

$y_Q = 11{,}25$

Die größtmögliche Höhe der Fensterfläche für Vorschlag 2 ist 11,25 m.

Vergleich der Flächeninhalte der Fensterfläche für Vorschlag 1 und Vorschlag 2:

Der Flächeninhalt A_2 der Fensterfläche für Vorschlag 2 berechnet sich wie folgt:

$A_2 = 11{,}25 \cdot 10$

$A_2 = 112{,}5 \text{ m}^2$

Der Flächeninhalt der Fensterfläche ist für Vorschlag 1 größer als für Vorschlag 2.

hutt.lernhilfen ist eine Marke der

Bergmoser + Höller Verlag AG

Karl-Friedrich-Str. 76
52072 Aachen
DEUTSCHLAND
T 0241-93888-123
F 0241-93888-188
E kontakt@buhv.de
www.buhv.de

Umsatzsteuer-Id.Nr.: DE 123600266
Verkehrsnummer: 10508
Handelsregister Aachen HRB 8580

Vorstand:
Andreas Bergmoser
Michael Bruns

Aufsichtsratsvorsitz:
Holger Knapp

Autor:
Joachim Krick

Lektorat:
Magdalena Noack
Svenja Lückerath

Ausgabe 2024/2025