pauker.

Abschluss2023

Realschule Baden-Württemberg

Lösungen Mathematik Muster III

Mathematik

hutt lernhilfen

10

Teil A1

Aufgabe 1

$$
\begin{aligned}
& (144 \cdot 12^4) : (3^6 \cdot 4^6) \\
= {} & (12^2 \cdot 12^4) : (3 \cdot 4)^6 \\
= {} & 12^{2+4} : 12^6 \\
= {} & 12^6 : 12^6 \\
= {} & 1
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

Jedes Muster hat links zwei Striche. Das erste Muster hat zusätzlich drei Striche dahinter. Das zweite Muster hat zusätzlich sechs Striche dahinter. Von jedem Muster zum nächsten kommen immer drei weitere Striche hinzu. Also gibt es für die Anzahl an Strichen folgende Gesetzmäßigkeit:

Muster (1): $2 + \mathbf{1} \cdot 3 = 5$
Muster (2): $2 + \mathbf{2} \cdot 3 = 8$
Muster (3): $2 + \mathbf{3} \cdot 3 = 11$
Muster (4): $2 + \mathbf{4} \cdot 3 = 14$

Daraus folgt für Muster (16): $2 + \mathbf{16} \cdot 3 = 2 + 48 = 50$
Für das 16. Muster muss Leonie 50 Striche malen.

Aufgabe 3

Bestimmung des Volumens des im Quader verbleibenden Hohlraums:

1. $V_{Wasser} = 5 \cdot 5 \cdot 9$
   $V_{Wasser} = 25 \cdot 9$
   $V_{Wasser} = 225\ cm^3$
2. $V_{Luft} = V_{Quader} - V_{Wasser}$
   $V_{Luft} = 300 - 225$
   $V_{Luft} = 75\ cm^3$

Das Volumen des im Quader verbleibenden Hohlraums, der nur Luft enthält, beträgt $75\ cm^3$.

Bestimmung der mindestens notwendigen Kantenlänge a des Würfels:
$V_{Würfel} = a^3$

Um ein Überlaufen des Würfels beim Umfüllen des Wassers zu vermeiden, muss das Volumen des Würfels mindestens so groß sein wie das des Wassers im Quader. Somit muss gelten:
$V_{Würfel} \geq V_{Wasser}$

$a^3 \geq 225\ cm^3$

Systematisches Probieren ergibt:
$4^3 = 64$; $5^3 = 125$; $6^3 = 216$; $7^3 = 343$

Also muss die (ganzzahlige) Kantenlänge des Würfels mindestens 7 cm betragen.

Aufgabe 4

Wenn das neu gekaufte Hemd schwarz wäre, müsste gelten:
P(„gleiche Farbe von Anzug und Hemd“) = P(S; s) + P(G; g) = $\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{12}{36}$. Das stimmt aber nicht mit der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit überein.

Wenn das neu gekaufte Hemd grau wäre, müsste gelten:
P(„gleiche Farbe von Anzug und Hemd“) = P(S; s) + P(G; g) = $\frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{10}{36}$. Das stimmt aber nicht mit der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit überein.

Dies bedeutet, dass das neu gekaufte Hemd weiß ist. Dann müsste nämlich gelten:
P(„gleiche Farbe von Anzug und Hemd“) = P(S; s) + P(G; g) = $\frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{8}{36}$. Das stimmt mit der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit überein.

Aufgabe 5

Ankathete von β: e

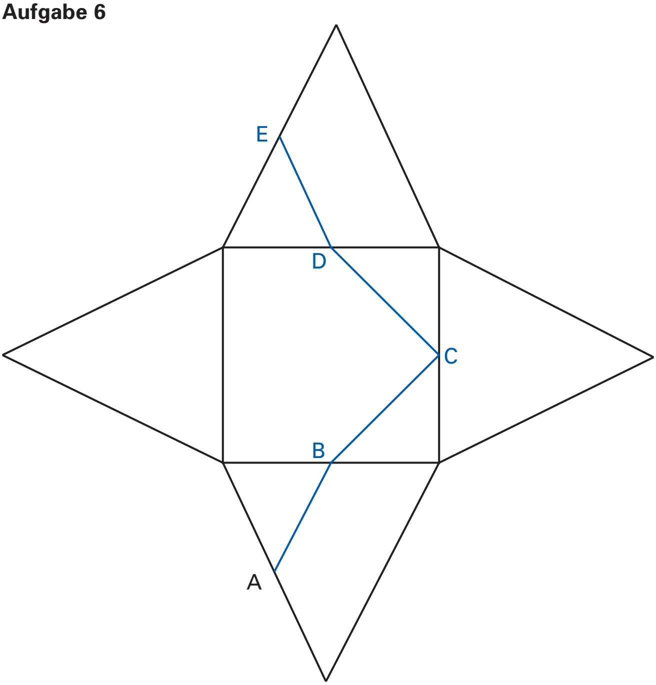
Ankathete von α: f

Gegenkathete von β: f

Gegenkathete von α: e

$\sin(\beta) = \frac{f}{g}$ $\quad$ $\tan(\alpha) = \frac{e}{f}$ $\quad$ $\cos(\beta) = \frac{e}{g}$

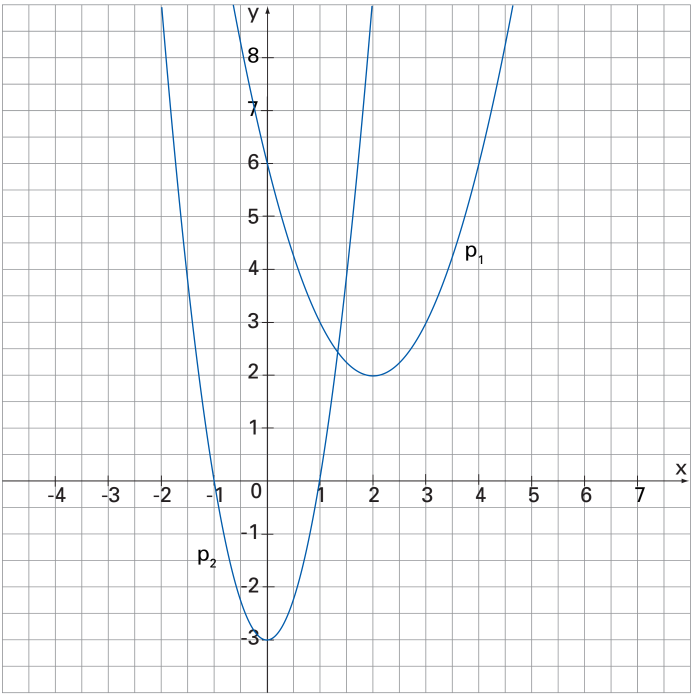
Aufgabe 6



Aufgabe 7

Fehlerbeschreibung:
Bei der Parabel p_1 wurde die Verschiebung der Normalparabel in y-Richtung falsch ausgeführt. Die Normalparabel muss nicht um 2 Einheiten nach unten, sondern um 2 Einheiten nach oben verschoben werden. Der Scheitelpunkt muss folglich (2 I 2) sein und nicht (2 I -2).
Bei der Parabel p_2 wurde die Streckung falsch ausgeführt. Die hier abgebildete Parabel geht durch die Punkte (-1 I -1), (1 I -1), das heißt, der Streckfaktor der hier abgebildeten Parabel ist 2. Tatsächlich ist der Streckfaktor laut Funktionsgleichung von p_2 aber 3, also verläuft die richtige Parabel p_2 noch schmaler als die hier abgebildete. Sie muss z. B. durch die Punkte (-1 I 0) und (1 I 0) verlaufen.

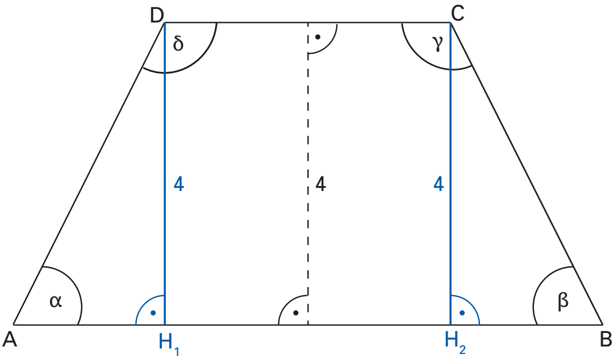
Korrektes Schaubild:



Maßstab verkleinert

Teil A2

Aufgabe 1



Bestimmung der fehlenden Innenwinkel β, γ und δ:

1. In einem gleichschenkligen Trapez sind die beiden an den parallelen Seiten liegenden Innenwinkel jeweils gleich groß, also gilt hier: $\alpha = \beta$ und $\gamma = \delta$.
2. Damit gilt: $\beta = 63{,}4°$
3. Mit der Winkelsumme im Viereck gilt:
   $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$
   Da $\alpha = \beta = 63{,}4°$ sowie $\gamma = \delta$ ist, gilt also:
   $$63{,}4° + 63{,}4° + \gamma + \gamma = 360°$$
   $$2\gamma + 126{,}8° = 360° \qquad | -126{,}8°$$
   $$2\gamma = 233{,}2° \qquad | :2$$
   $$\gamma = 116{,}6°$$
4. Da $\gamma = \delta$ ist, gilt auch: $\delta = 116{,}6°$

Berechnung der fehlenden Seitenlängen $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$:

1. In einem gleichschenkligen Trapez sind die beiden nicht parallelen Seiten gleich lang, also gilt hier: $\overline{AD} = \overline{BC}$
2. Im rechtwinkligen Dreieck AH_1D gilt:
   $$\sin(\alpha) = \frac{\overline{H_1D}}{\overline{AD}}$$
   $$\sin(63{,}4°) = \frac{4}{\overline{AD}} \qquad | \cdot \overline{AD}$$
   $$\sin(63{,}4°) \cdot \overline{AD} = 4 \qquad | : \sin(63{,}4°)$$
   $$\overline{AD} = \frac{4}{\sin(63{,}4°)}$$
   $$\overline{AD} \approx 4{,}47$$

Damit gilt, dass sowohl $\overline{AD}$ als auch $\overline{BC}$ etwa 4,5 cm lang sind.

Berechnung der fehlenden Seitenlänge $\overline{AB}$:

1. Da das Trapez ABCD gleichschenklig ist, sind die Dreiecke AH_1D und CH_2B kongruent. Folglich gilt: $\overline{AH_1} = \overline{H_2B}$

2. Im rechtwinkligen Dreieck AH_1D gilt:

$$\overline{AH_1}^2 + \overline{H_1D}^2 = \overline{AD}^2 \qquad \text{(Pythagoras)}$$
$$\overline{AH_1}^2 + 4^2 = 4{,}47^2 \qquad | -(4)^2$$
$$\overline{AH_1}^2 = 4{,}47^2 - 16 \qquad | \sqrt{\ }$$
$$\overline{AH_1} = \sqrt{4{,}47^2 - 16}$$
$$\overline{AH_1} = 2$$

Damit gilt, dass sowohl $\overline{AH_1}$ als auch $\overline{H_2B}$ etwa 2 cm lang sind.

3. Da $\overline{H_1H_2} = \overline{DC} = 4$ cm ist (siehe Lösungsskizze), gilt:

$$\overline{AB} = \overline{AH_1} + \overline{H_1H_2} + \overline{H_2B}$$
$$\overline{AB} = 2 + 4 + 2$$
$$\overline{AB} = 8 \text{ cm}$$

Die Seitenlänge $\overline{AB}$ beträgt somit 8 cm.

Aufgabe 2

Berechnung des Radius r der Halbkugel:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r}{8{,}5 \text{ cm}}$$

$$8{,}5 \text{ cm} \cdot \sin(25°) = r$$

$$r = 8{,}5 \text{ cm} \cdot \sin(25°) \approx 3{,}6 \text{ cm}$$

Berechnung der Oberfläche der Halbkugel:

$$O_{Halbkugel} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 2 \cdot \pi \cdot (3{,}6 \text{ cm})^2 \approx 81{,}4 \text{ cm}^2$$

$$\boxed{O_{Kugel} = 4 \cdot \pi \cdot r^2}$$

Der Schokoladenüberzug bedeckt eine Fläche von etwa 81,4 cm^2.

Berechnung der Höhe h des Kegels (gestrichelte Linie): Der Radius r des Kegels (und gleichzeitig der Halbkugel) ist oben bereits berechnet worden: r = 3,6 cm

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r}{h}$$
$$\tan(25°) = \frac{3{,}6}{h} \qquad | \cdot h$$
$$h \cdot \tan(25°) = 3{,}6 \qquad | : \tan(25°)$$
$$h = 3{,}6 : \tan(25°)$$
$$h \approx 7{,}7 \text{ cm}$$

Das Gesamtvolumen V_{gesamt} berechnet sich nun so: $V_{gesamt} = V_{Kegel} + V_{Halbkugel}$

Berechnung von V_{Kegel}:

$V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \approx \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (3{,}6\ cm)^2 \cdot 7{,}7\ cm \approx 104{,}5\ cm^3$

Berechnung von $V_{Halbkugel}$:

$V_{Halbkugel} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \approx \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot (3{,}6\ cm)^3 \approx 97{,}7\ cm^3$

$\Rightarrow$ Gesamtvolumen: $V_{gesamt} = V_{Kegel} + V_{Halbkugel} \approx 202{,}2\ cm^3$

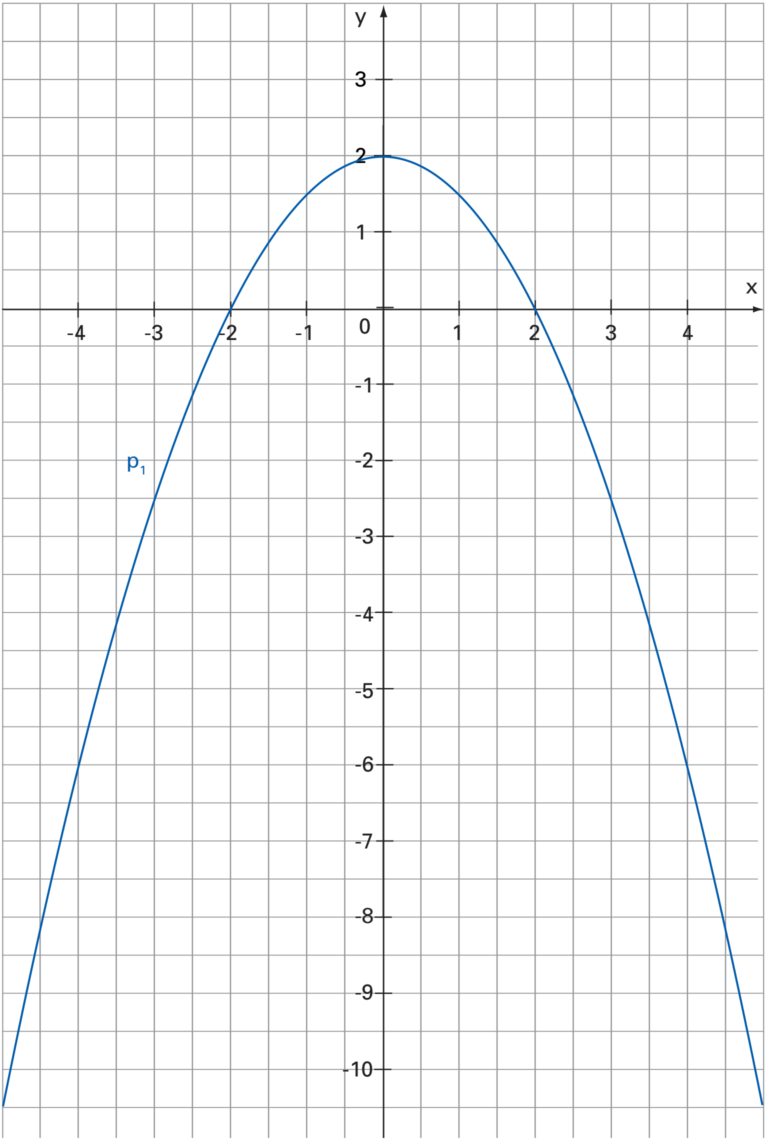
$202{,}2\ cm^3 = 0{,}2022\ dm^3 \approx 0{,}2\ l$

Insgesamt kann also etwas mehr als 0,2 Liter Eis gegessen werden.

Aufgabe 3

Wertetabelle für die Parabel p_1:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-6	-2,5	0	1,5	2	1,5	0	-2,5	-6



Aufstellen der Gleichung von p_2:

Da $S_2\ (1 \mid -\frac{5}{2})$ der Scheitelpunkt von p_2 ist, hat p_2 die Gleichung $y = (x-1)^2 - \frac{5}{2}$.

Berechnung aller Schnittpunkte von p_1 und p_2:

$$(x-1)^2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + 2 \qquad | \text{ ausmultiplizieren}$$

$$x^2 - 2x + 1 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + 2 \qquad | \text{ zusammenfassen}$$

$$x^2 - 2x - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + 2 \qquad | + \frac{1}{2}x^2 \qquad | - 2$$

$$\frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{7}{2} = 0 \qquad | \cdot \frac{2}{3}$$

$$x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{7}{3} = 0 \qquad | \text{ Lösungsformel}$$

$$x_{1,2} = -\frac{-\frac{4}{3}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-\frac{4}{3}}{2}\right)^2 - \left(-\frac{7}{3}\right)}$$

$$x_{1,2} = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{7}{3}}$$

$$x_{1,2} = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{21}{9}}$$

$$x_{1,2} = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9}}$$

$$x_{1,2} = \frac{2}{3} \pm \frac{5}{3}$$

$$x_1 = \frac{2}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{3}{3} = -1$$

$$x_2 = \frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{7}{3}$$

Einsetzen der beiden Lösungen x_1 und x_2, z. B. in die Gleichung von p_1, ergibt:

$$y_1 = -\frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + 2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

$$y_2 = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^2 + 2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{49}{9} + 2 = -\frac{49}{18} + 2 = -\frac{49}{18} + \frac{36}{18} = -\frac{13}{18}$$

Damit gilt für die beiden Schnittpunkte A und B von p_1 und p_2: $A\left(-1 \mid \frac{3}{2}\right)$ und $B\left(\frac{7}{3} \mid -\frac{13}{18}\right)$

Aufgabe 4

Berechnung des prozentualen Wertzuwachses der Saison 2018/2019 im Vergleich zur Saison 2017/2018:

$$W = G \cdot \frac{p}{100}$$

$$7{,}98 = 7{,}24 \cdot \frac{p}{100} \qquad | : 7{,}24 \qquad | \cdot 100$$

$$p = 110{,}2\ \%$$

Damit beträgt der prozentuale Wertzuwachs 10,2 %.

Berechnung des (absoluten) Gewinns für die Saison 2015/2016:
Der prozentuale Wertverlust der Saison 2016/2017 im Vergleich zur Saison 2015/2016 ist doppelt so hoch wie der im ersten Schritt berechnete prozentuale Wertzuwachs der Saison 2018/2019 im Vergleich zur Saison 2017/2018. Der Wertverlust von 2015/2016 zu 2016/2017 beträgt also

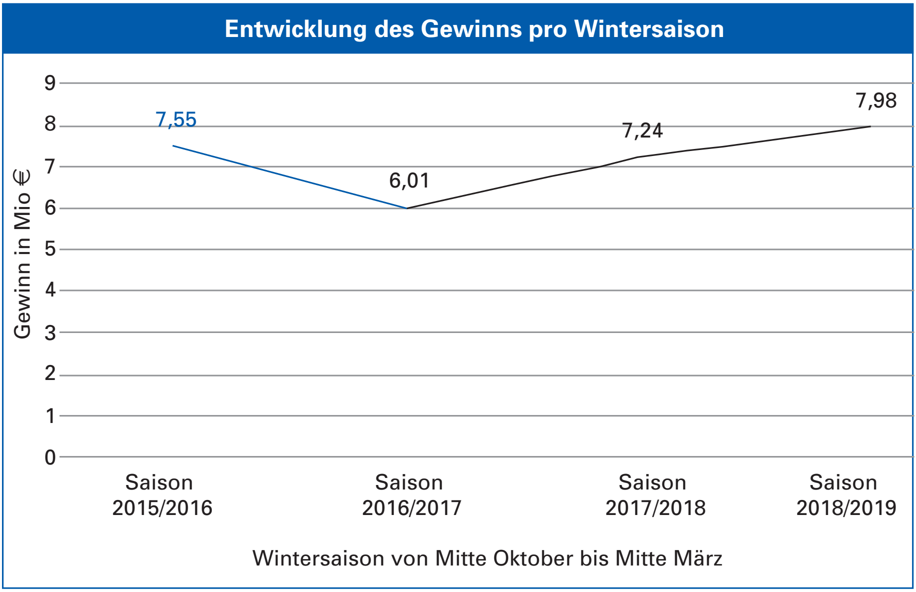
$2 \cdot 10{,}2\ \% = 20{,}4\ \%$. Das bedeutet, dass der Prozentwert (= Gewinn Saison 2016/2017) $100\ \% - 20{,}4\ \% = 79{,}6\ \%$ des Grundwertes (= Gewinn Saison 2015/2016) ist:

$$W = G \cdot \frac{p}{100}$$

$$6{,}01 = G \cdot \frac{79{,}6}{100} \qquad |:79{,}6 \qquad |\cdot 100$$

$$G = 7{,}55 \text{ Mio } €$$

Der Gewinn der Handelskette betrug in der Saison 2015/2016 etwa 7,55 Mio € (siehe eingezeichneter Wert im unten abgebildeten Diagramm für „Wintersaison 2015/2016").



Bestimmung des Zinssatzes, der bei einer Zinseszinsanlage mit einer Laufzeit von 3 Jahren zur Erzielung des gleichen Wertzuwachses nötig wäre:
$K_0 = 7{,}55$; $n = 3$; $K_3 = 7{,}98$; p = gesucht

$$K_3 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$$

$$7{,}98 = 7{,}55 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 \qquad |:7{,}55$$

$$1{,}057 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 \qquad |\sqrt[3]{}$$

$$\sqrt[3]{1{,}057} = 1 + \frac{p}{100}$$

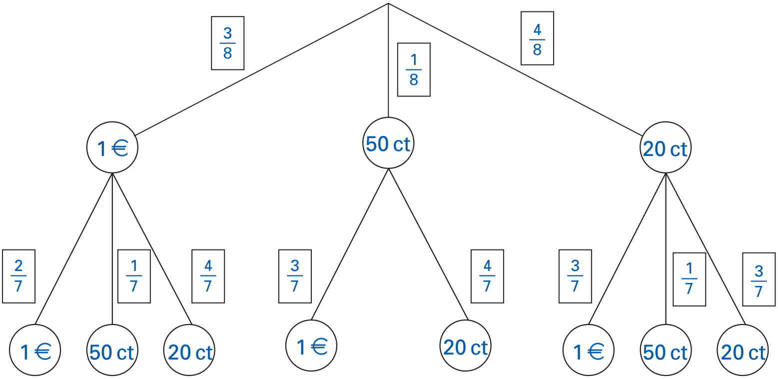
$$1{,}019 = 1 + \frac{p}{100} \qquad |-1$$

$$0{,}019 = \frac{p}{100} \qquad |\cdot 100$$

$$1{,}9\ \% = p$$

Der Zinssatz, der zur Erzielung des gleichen Wertzuwachses über 3 Jahre nötig wäre, beträgt 1,9 %.

Aufgabe 5



Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass ein Betrag von 1,50 € herausgenommen wird:

P(„Geldbetrag = 1,50 €") = P(1; 0,50) + P(0,50; 1) = $\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{56}$ = 10,7 %

Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass ein Betrag von mindestens 1 € herausgenommen wird:

P(„Geldbetrag = mindestens 1 €") = 1 – P(„Geldbetrag = weniger als 1 €")
= 1 – (P(0,50; 0,20) + P(0,20; 0,50) + P(0,20; 0,20))
$= 1 - \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7}\right) = 1 - \frac{20}{56} = \frac{36}{56}$ = 64,3 %

Aufgabe 6

a) Die Stichprobe umfasst n = 21 Autofahrer. Damit errechnet sich das arithmetische Mittel so:

$$\frac{29{,}2 + 33{,}7 + 30{,}4 + 35{,}8 + 28{,}7 + 30 + 30{,}4 + \mathbf{h} + 38{,}9 + 33{,}1 + 32{,}4 + 41{,}7 + 34{,}6 + 28{,}4 + 37{,}7 + 52{,}8 + 31{,}1 + 32{,}9 + 36{,}7 + 33{,}7 + 39}{21} = 35{,}0$$

$$\frac{691{,}2 + h}{21} = 35{,}0 \qquad | \cdot 21$$

$$691{,}2 + h = 735 \qquad | - 691{,}2$$

$$h = 43{,}8$$

Der nicht lesbare Wert beträgt 43,8 km/h.

b) Zunächst muss die Urliste in eine Rangliste verwandelt werden:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
28,4	28,7	29,2	30,0	30,4	30,4	31,1	32,4	32,9	33,1	33,7	33,7	34,6	35,8	36,7	37,7	38,9	39,0	41,7	43,8	52,8

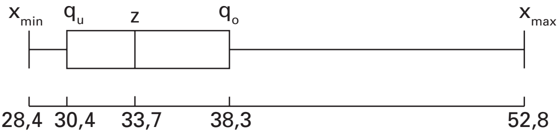
Bestimmung der Kennwerte:

$x_{min} = 28{,}4$; $\quad x_{max} = 52{,}8$; $\quad z = x_{\frac{1}{2}(21+1)} = x_{11} = 33{,}7$

$\frac{1}{4} \cdot (21 + 1) = 5{,}5$ Also ist $q_u = \frac{x_5 + x_6}{2} = 30{,}4$;

$\frac{3}{4} \cdot (21 + 1) = 16{,}5$ Also ist $q_o = \frac{x_{16} + x_{17}}{2} = \frac{37{,}7 + 38{,}9}{2} = 38{,}3$

Damit ergibt sich folgender Boxplot:



Maßstab 1: 2

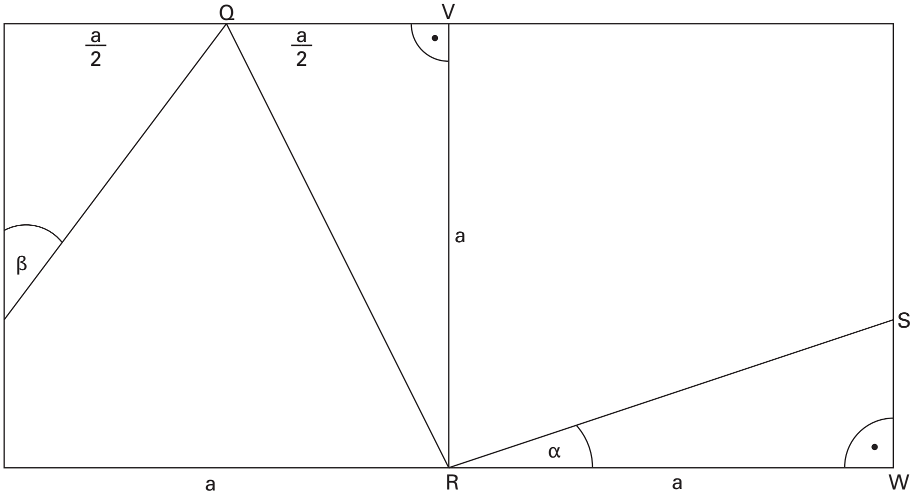
c) Zur Bewertung der drei Aussagen:

- „Mehr als 75 % aller Autofahrer sind bei dieser Kontrolle zu schnell gefahren.“
  Diese Aussage ist wahr. Aus der Rangliste kann man ablesen, dass die Fahrer auf den Rangplätzen 5 bis 21 schneller als die zulässige Höchstgeschwindigkeit von 30 km/h waren. Dies sind insgesamt 17 von 21 Fahrern, was einem Anteil von $\frac{17}{21} \approx 81$ % entspricht.
- „Mehr als die Hälfte aller Autofahrer haben bei dieser Kontrolle die zugelassene Höchstgeschwindigkeit um mindestens 10 % überschritten.“
  Diese Aussage ist wahr. Eine Überschreitung der Höchstgeschwindigkeit um 10 % bedeutet eine Geschwindigkeit von 30 km/h + 0,1 · 30 km/h = 33 km/h. Aus der Rangliste kann man ablesen, dass die Fahrer auf den Rangplätzen 10 bis 21 eine Geschwindigkeit von mindestens 33 km/h hatten. Dies sind insgesamt 12 von 21 Fahrern, was einem Anteil von $\frac{12}{21} \approx 57{,}1$ % entspricht und damit mehr als die Hälfte aller Fahrer einschließt.
- „Wie das arithmetische Mittel zeigt, sind mindestens die Hälfte aller Autofahrer bei dieser Kontrolle 35,0 km/h oder schneller gefahren.“
  Diese Aussage ist falsch. Allein das arithmetische Mittel gibt keinerlei Informationen darüber, wie viele Werte einer Datensammlung unter oder über dem arithmetischen Mittel liegen. Nur der Zentralwert kann darüber Aufschluss geben. Schaut man sich die Rangliste der Datensammlung an, so wird schnell klar, dass die obige Aussage tatsächlich nicht stimmt. Nur die Fahrer auf den Rangplätzen 14 bis 21 hatten Geschwindigkeiten von 35,0 km/h oder mehr. Dies ist aber nur ein Anteil von $\frac{8}{21} \approx 38{,}1$ %. Dies ist weit weniger als die Hälfte.

Teil B

Aufgabe 1

a)



Berechnung von $\overline{PQ}$:

$$\sin(\beta) = \frac{\frac{a}{2}}{\overline{PQ}}$$

$$\boxed{\sin(\beta) = \frac{GK}{Hy}}$$

$$\sin(35{,}5°) = \frac{\frac{6{,}5}{2}\text{ cm}}{\overline{PQ}}$$

$$\overline{PQ} = \frac{3{,}25\text{ cm}}{\sin(35{,}5°)}$$

$$\overline{PQ} = 5{,}6\text{ cm}$$

Berechnung von α:

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{\overline{RS}}$$

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{AK}{Hy}}$$

Berechnung von $\overline{RS}$:

$$\overline{RS} = \ell - \overline{PQ} - \overline{QR}$$
$$= 20{,}1\text{ cm} - 5{,}6\text{ cm} - \overline{QR}$$

Berechnung von $\overline{QR}$:

Pythagoras im Dreieck △ QVR:

$$\overline{QR}^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\overline{QR}^2 = (6{,}5\text{ cm})^2 + (3{,}25\text{ cm})^2 = 52{,}81\text{ cm}^2 \quad |\sqrt{\ }$$

$$\overline{QR} \approx 7{,}27\text{ cm}$$

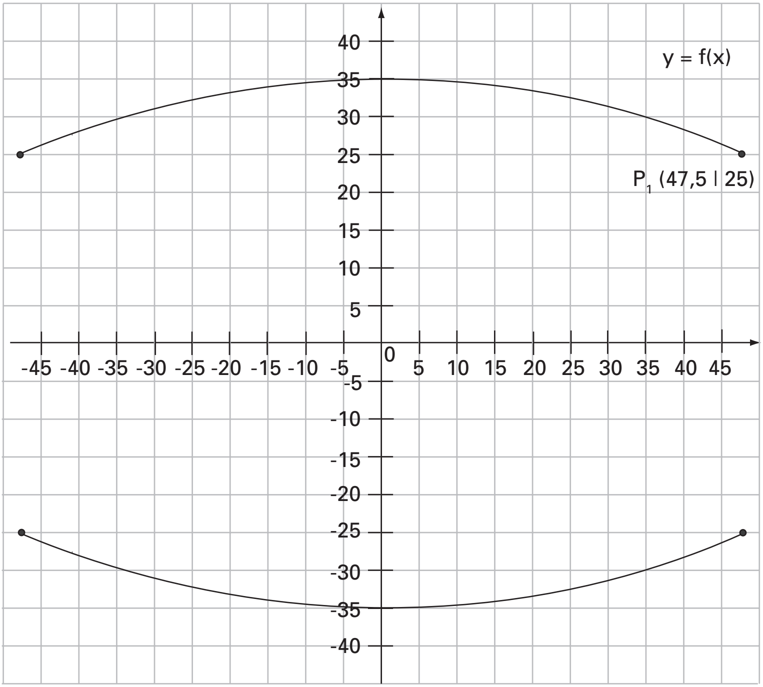
Damit ist:
$\overline{RS} = 20,1\text{ cm} - 5,6\text{ cm} - 7,27\text{ cm} = 7,23\text{ cm}$

und

$\cos(\alpha) = \dfrac{6,5\text{ cm}}{7,23\text{ cm}} = 0,9$ $\quad | \cos^{-1}$

$\alpha \approx 25,84°$

b) Der Scheitelpunkt beträgt:
S (0 I 35)



Allgemeine Parabelgleichung: $y = a \cdot x^2 + c$
Scheitelpunkt: S (0 I 35)
Weiterer Punkt: P_1 (47,5 I 25)
$y = ax^2 + 35$

P_1 einsetzen:
$25 = a \cdot 47,5^2 + 35$ $\quad | -35$
$-10 = a \cdot 2256,25$ $\quad | : 2256,25$
$a = -0,00443$

Die Funktionsgleichung lautet: $y = -0,00443x^2 + 35$

Aufgabe 2

a) Zunächst muss das Volumen von 4,5 Millionen Liter in m^3 umgewandelt werden, um danach in den weiteren Berechnungen die Maße des Aquariums (in m) verwenden zu können:
4 500 000 Liter = 4 500 000 dm^3 = 4500 m^3

Das Aquarium besteht aus einem Quader, aus dem ein halber Zylinder herausgeschnitten ist.

Volumen-Formel des Quaders: $V_Q = a \cdot b \cdot c$
Volumen-Formel des Zylinders: $V_Z = \pi \cdot r^2 \cdot h$
und damit $0{,}5 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$ für einen halben Zylinder.

Die Variable x steht für die gesuchte Wasserhöhe (in m) im Aquarium. Damit kann nun folgende Gleichung aufgestellt werden:

Wasservolumen im Quader mit Wasserhöhe x – Volumen des halben Zylinders
= Wasservolumen im Aquarium
$36\text{ m} \cdot 30\text{ m} \cdot x - 0{,}5 \cdot \pi \cdot (3\text{ m})^2 \cdot 30\text{ m} = 4500\text{ m}^3$
$1080\text{ m}^2 \cdot x - 0{,}5 \cdot 3{,}14 \cdot 9\text{ m}^2 \cdot 30\text{ m} = 4500\text{ m}^3$
$1080\text{ m}^2 \cdot x - 423{,}9\text{ m}^3 = 4500\text{ m}^3 \qquad | + 423{,}9\text{ m}^3$
$1080\text{ m}^2 \cdot x = 4923{,}9\text{ m}^3 \qquad | : 1080\text{ m}^2$
$x \approx 4{,}56\text{ m}$

Das Wasser steht 4,56 m hoch im Aquarium.

Gesucht ist der Flächeninhalt des halben Zylindermantels.
Formel für die Mantelfläche des Zylinders: $M = 2\pi rh$ und damit πrh für die halbe Mantelfläche.
Der gesuchte Flächeninhalt ist also:
$\pi \cdot (3\text{ m}) \cdot (30\text{ m}) = 3{,}14 \cdot 90\text{ m}^2 = 282{,}6\text{ m}^2$

Die zu reinigende Fläche beträgt 282,6 m^2.

b) Funktionsgleichung von p_1:
Scheitelpunkt: S_1 (0 | -7)
Weiterer Punkt: (1 | -6,5)
⇒ Also ist der Streckfaktor 0,5.

Damit gilt: p_1: $y = 0{,}5x^2 - 7$

Koordinaten der Punkte S_2, P_1 und Q_1:

1. Aus der Funktionsgleichung abzulesen: S_2 (0 | 2)

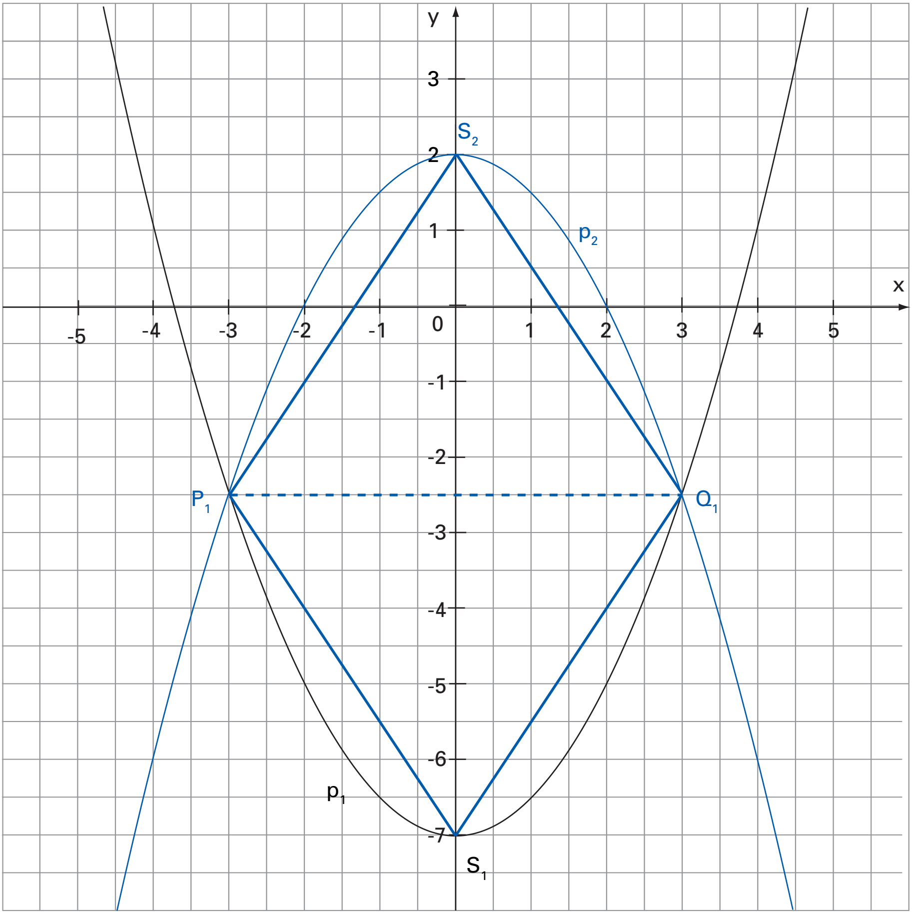
2. Schnittpunkte P_1 und Q_1:
$0{,}5x^2 - 7 = -0{,}5x^2 + 2 \qquad | + 0{,}5x^2 \qquad | - 2$
$x^2 - 9 = 0 \qquad | + 9$
$x^2 = 9 \qquad | \sqrt{\ }$
$x_1 = -3; \qquad x_2 = 3$

Einsetzen der gefundenen Werte für x_1 und x_2, z. B. in die Gleichung von p_1:
$y_1 = 0{,}5 \cdot (-3)^2 - 7 = 4{,}5 - 7 = -2{,}5$
$y_2 = 0{,}5 \cdot 3^2 - 7 = 4{,}5 - 7 = -2{,}5$

Damit gilt für die Schnittpunkte P_1 und Q_1: P_1 (-3 | -2,5) und Q_1 (3 | -2,5)

Wertetabelle und Graph für p_2:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-6	-2,5	0	1,5	2	1,5	0	-2,5	-6



Viereck $P_1S_1Q_1S_2$ ist eine Raute, aber kein Quadrat (Begründung):
Die y-Achse ist Symmetrieachse für beide Parabeln. Die gestrichelte Linie zerlegt das Viereck $P_1S_1Q_1S_2$ in vier kongruente, rechtwinklige Dreiecke, da die jeweiligen Katheten in allen vier Dreiecken gleich lang sind. Daraus folgt, dass auch die vier Hypotenusen $\overline{P_1S_1}$, $\overline{S_1Q_1}$, $\overline{Q_1S_2}$ und $\overline{S_2P_1}$ gleich lang sind. Damit ist das Viereck auf jeden Fall eine Raute.
Die beiden Diagonalen $\overline{P_1Q_1}$ und $\overline{S_1S_2}$ stehen senkrecht aufeinander, sind aber nicht gleich lang, denn aus der Zeichnung lässt sich ablesen, dass gilt: $\overline{P_1Q_1}$ = 6 LE und $\overline{S_1S_2}$ = 9 LE
Damit ist das Viereck $P_1S_1Q_1S_2$ kein Quadrat, denn in einem Quadrat sind die beiden Diagonalen gleich lang.

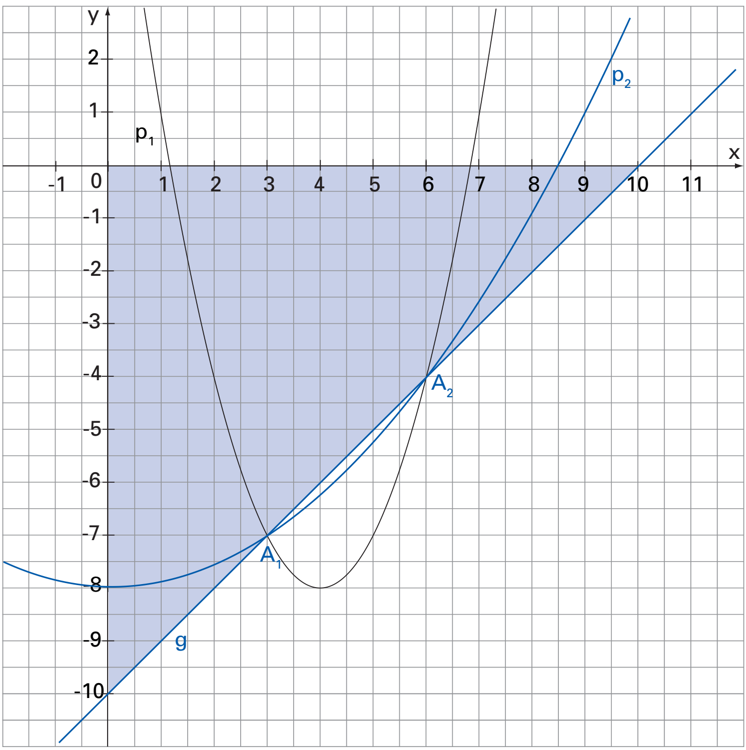
Koordinaten der (neuen) Schnittpunkte P_2 und Q_2:
In dem (neuen) Viereck $P_2S_1Q_2S_2$ mit den unveränderten Scheitelpunkten S_1 und S_2 gilt für die vertikale Diagonale nach wie vor: $\overline{S_1S_2} = 9$ LE

Damit das Viereck $P_2S_1Q_2S_2$ ein Quadrat bildet, müsste auch die (neue) horizontale Diagonale $\overline{P_2Q_2}$ 9 Längeneinheiten lang sein. Aus Symmetriegründen ist dies aber nur möglich, wenn die Abstände von P_2 zur x-Achse und von Q_2 zur x-Achse jeweils 4,5 LE und somit zusammen 9 LE betragen.

Daraus folgt: Die x-Koordinaten von P_2 und Q_2 müssen -4,5 bzw. 4,5 sein. Damit sich die beiden Diagonalen auch halbieren, müssen die y-Koordinaten von P_2 und Q_2 beide den Wert -2,5 haben. Damit folgt für die Koordinaten von P_2 und Q_2: P_2 (-4,5 I -2,5) und Q_2 (4,5 I -2,5)

Aufgabe 3

a)



Maßstab verkleinert

Funktionsgleichung von p_1:
Der Scheitel ist S_1 (4 I -8), damit gilt: p_1: $y = (x - 4)^2 - 8$

Berechnung der Koordinaten der Schnittpunkte von p_1 und p_2:

$$(x-4)^2 - 8 = \frac{1}{9}x^2 - 8$$

$$x^2 - 8x + 16 - 8 = \frac{1}{9}x^2 - 8 \qquad | \text{ zusammenfassen}$$

$$x^2 - 8x + 8 = \frac{1}{9}x^2 - 8 \qquad | + 8 \qquad | - \frac{1}{9}x^2$$

$$\frac{8}{9}x^2 - 8x + 16 = 0 \qquad | \cdot \frac{9}{8}$$

$$x^2 - 9x + 18 = 0 \qquad | \text{ Lösungsformel}$$

$$x_{1,2} = -\frac{-9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-9}{2}\right)^2 - 18}$$

$$x_{1,2} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{72}{4}}$$

$$x_{1,2} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$x_{1,2} = \frac{9}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{9}{2} + \frac{3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Einsetzen der gefundenen Werte für x_1 und x_2, z. B. in die Gleichung von p_1:
$y_1 = (3-4)^2 - 8 = (-1)^2 - 8 = 1 - 8 = -7$
$y_2 = (6-4)^2 - 8 = 2^2 - 8 = 4 - 8 = -4$

Damit gilt für die Schnittpunkte: A_1 (3 | -7) und A_2 (6 | -4)

Bestimmung der Gleichung für die Gerade g:

1. $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4-(-7)}{6-3} = \frac{3}{3} = 1$
2. Mit dem Ansatz g: $y = x + c$ und einer Punktprobe, z. B. mit A_1:
   $-7 = 3 + c \qquad | -3$
   $c = -10$

Damit gilt: g: $y = x - 10$

Berechnung des Inhalts der Fläche, die g mit den Koordinatenachsen einschließt: Die Fläche ist ein rechtwinkliges Dreieck.

$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g$

$A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10$

$A = 50$ FE

Der Inhalt der eingeschlossenen Fläche beträgt 50 Flächeneinheiten.

b) Der zu bestimmende Lospreis wird mit x bezeichnet.

Berechnung der Anzahl an Losen, deren Gewinn gleich dem Lospreis ist:

1. $500 - 10 - 20 - 30 = 440$
2. $25\ \%$ von $440 = 0{,}25 \cdot 440 = 110$

110 Lose haben einen Gewinn, der gleich dem Lospreis (x) ist.

Berechnung der Anzahl an Nieten:
$440 - 110 = 330$
Unter den 500 Losen befinden sich 330 Nieten.

Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für jede Loskategorie:

1. $P(20\text{-€-Gewinn}) = \frac{10}{500} = \frac{1}{50}$
2. $P(10\text{-€-Gewinn}) = \frac{20}{500} = \frac{2}{50}$
3. $P(5\text{-€-Gewinn}) = \frac{30}{500} = \frac{3}{50}$
4. $P(x\text{-€-Gewinn}) = \frac{110}{500} = \frac{11}{50}$
5. $P(\text{Niete}) = \frac{330}{500} = \frac{33}{50}$

Berechnung des nötigen Lospreises:

1. Wenn mit 500 verkauften Losen ein Reingewinn von 600 € erzielt werden soll, muss der Reingewinn für ein Los 600 € : 500 = 1,20 € sein.
   Damit ist der Erwartungswert -1,20 €.
2. Mit dem Erwartungswert von -1,20 gilt dann folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{50} \cdot 20 + \frac{2}{50} \cdot 10 + \frac{3}{50} \cdot 5 + \frac{11}{50} \cdot x - x &= -1{,}2 && \mid \cdot 50 \\
20 + 20 + 15 + 11x - 50x &= -60 && \mid \text{zusammenfassen} \\
55 - 39x &= -60 && \mid -55 \\
-39x &= -115 && \mid :(-39) \\
x &= 2{,}95
\end{aligned}$$

Die Schülergruppe muss als Lospreis 2,95 € festlegen.