pauker.

# Abschluss2023

## Realschule Baden-Württemberg


# Lösungen Mathematik Muster II

Mathematik

hutt lernhilfen

10

## Teil A1

### Aufgabe 1

$$
\begin{aligned}
& (81 : 3^6) \cdot 9 \\
= \; & (3^4 : 3^6) \cdot 3^2 \\
= \; & 3^{4-6} \cdot 3^2 \\
= \; & 3^{-2} \cdot 3^2 \\
= \; & 3^{-2+2} \\
= \; & 3^0 \\
= \; & 1
\end{aligned}
$$

### Aufgabe 2

Jedes Muster hat unten ein Dreieck. Das zweite Muster hat zusätzlich zwei Dreiecke. Das dritte Muster hat zusätzlich vier Dreiecke. Von jedem Muster zum nächsten kommen immer zwei weitere Dreiecke hinzu. Also gibt es für die Anzahl an Dreiecken folgende Gesetzmäßigkeit:

Muster (1): $1$
Muster (2): $1 + 1 \cdot 2 = 1 + (\mathbf{2} - 1) \cdot 2 = 3$
Muster (3): $1 + 2 \cdot 2 = 1 + (\mathbf{3} - 1) \cdot 2 = 5$
Muster (4): $1 + 3 \cdot 2 = 1 + (\mathbf{4} - 1) \cdot 2 = 7$
Muster (5): $1 + 4 \cdot 2 = 1 + (\mathbf{5} - 1) \cdot 2 = 9$

Daraus folgt für Muster (18): $1 + (\mathbf{18} - 1) \cdot 2 = 1 + 17 \cdot 2 = 1 + 34 = 35$
Für das 18. Muster benötigt Yannick 35 Dreiecke.

### Aufgabe 3

Bestimmung der Höhe des Quaders:

1.
$$
\begin{aligned}
V_{Py} &= \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \\
V_{Py} &= \frac{1}{3} \cdot 9^2 \cdot 9 \\
V_{Py} &= \frac{1}{3} \cdot 81 \cdot 9 \\
V_{Py} &= 27 \cdot 9 \\
V_{Py} &= 243
\end{aligned}
$$

Das Volumen der Pyramide beträgt 243 cm³.

2.
$$
\begin{aligned}
V_{Qu} &= G \cdot h \\
V_{Qu} &= 3^2 \cdot h \\
V_{Qu} &= 9\ \text{cm}^2 \cdot h
\end{aligned}
$$

3.
$$
\begin{aligned}
V_{Qu} &= V_{Py} \\
243\ \text{cm}^3 &= 9\ \text{cm}^2 \cdot h \qquad | : 9\ \text{cm}^2 \\
h &= 27\ \text{cm}
\end{aligned}
$$

Die Höhe des Quaders muss 27 cm betragen.

Prüfungen

Prozentualer Vergleich der beiden Höhen:

$W = G \cdot p\ \%$

$9 = 27 \cdot p\ \% \qquad | : 27$

$\frac{9}{27} = p\ \%$

$\frac{1}{3} = p\ \% = 33{,}3\ \%$

oder:

$$27\ \text{cm} \mathrel{\hat{=}} 100\ \% \quad \xrightarrow{:3} \quad 9\ \text{cm} \mathrel{\hat{=}} 33{,}3\ \%$$

Die Höhe der Pyramide beträgt etwa 33,3 % der Höhe des Quaders.

### Aufgabe 4

Wenn der freie Sektor mit einem B oder mit einem anderen Buchstaben des Alphabets beschriftet wäre, der weder A noch C ist, dann müsste gelten: $P(A; C) = \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{4}{64} = \frac{2}{32}$. Dies stimmt aber nicht mit der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit überein.

Wenn der freie Sektor mit dem Buchstaben A beschriftet wäre, dann müsste gelten:
$P(A; C) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$. Dies stimmt mit der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit überein.
Wenn der freie Sektor mit dem Buchstaben C beschriftet wäre, dann müsste gelten:
$P(A; C) = \frac{2}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$. Dies stimmt ebenfalls mit der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit überein.

Dies bedeutet, dass der freie Sektor des Glücksrades entweder mit dem Buchstaben A oder mit dem Buchstaben C beschriftet sein muss, sodass die vorgegebene Wahrscheinlichkeit gilt.

### Aufgabe 5

a) $\sin(185°)$
$= \sin(180° + 5°)$
$= \sin(360° - 5°)$
$= \sin(355°)$

Mögliche Begründung: Dieser Sinuswert ist negativ, weil alle Sinuswerte im 3. und 4. Quadranten (also im Intervall ]180°; 360°[ ) negativ sind.

b) $\sin(220°)$
$= \sin(180° + 40°)$
$= \sin(360° - 40°)$
$= \sin(320°)$

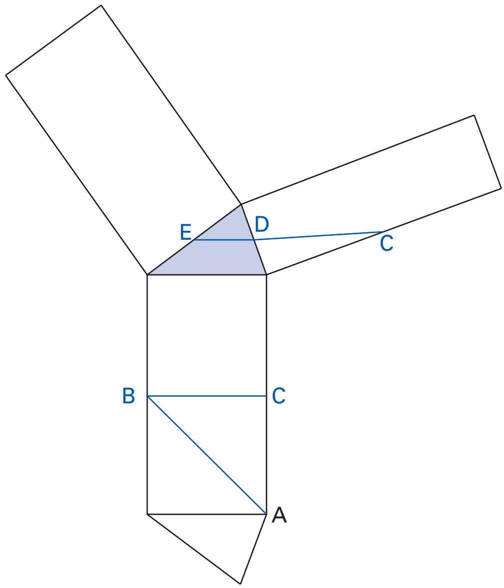
Mögliche Begründung: Dieser Sinuswert ist negativ, weil alle Sinuswerte im 3. und 4. Quadranten (also im Intervall ]180°; 360°[ ) negativ sind.

c) Der Wert sin(90°) sollte auswendig bekannt sein: $\sin(90°) = 1\ (> 0)$

Mögliche Begründung: Dieser Sinuswert ist positiv, da alle Sinuswerte im 1. und 2. Quadranten (also im Intervall ]0°; 180°[ ) positiv sind.

(In allen drei Teilaufgaben sind auch andere Begründungen (Einheitskreis; Sinuskurve) möglich.)

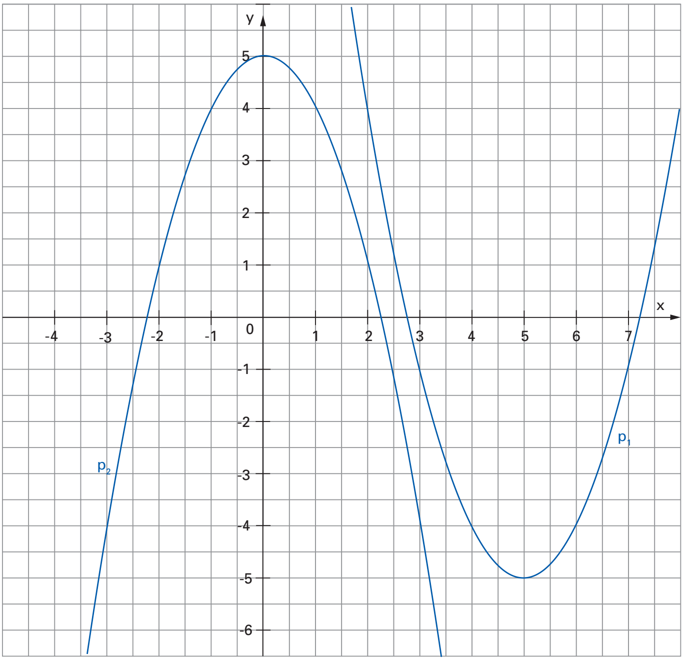
**Aufgabe 6**



## Aufgabe 7

Fehlerbeschreibung:
Bei der Parabel $p_1$ wurde die Verschiebung der Normalparabel in x-Richtung falsch ausgeführt. Die Normalparabel muss nicht um 5 Einheiten nach links, sondern um 5 Einheiten nach rechts verschoben werden. Der Scheitelpunkt von $p_1$ muss folglich (5 I -5) sein und nicht (-5 I -5).
Bei der Parabel $p_2$ wurde die Streckung falsch ausgeführt. Zwar ist die Parabel $p_2$ tatsächlich nach unten geöffnet, aber sie muss die Form einer Normalparabel haben, da der Faktor vor $x^2$ eine (unsichtbare) -1 ist. Die hier abgebildete Parabel ist aber (mit dem Faktor -2) gestreckt und damit schmaler als die Normalparabel.

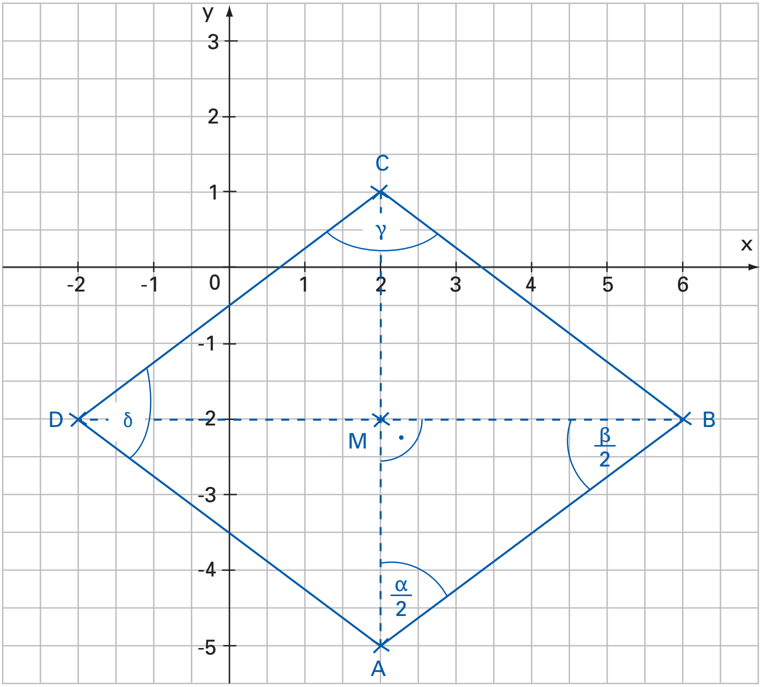
Korrektes Schaubild:




Maßstab verkleinert

## Teil A2

### Aufgabe 1




Da sich in einer Raute die beiden Diagonalen senkrecht schneiden und gegenseitig halbieren, gilt: D (-2 I -2)

Eine Raute wird durch ihre beiden Diagonalen in vier kongruente, rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Deshalb genügt es für die folgenden Berechnungen, exemplarisch das Dreieck ABM zu betrachten.

Berechnung der Innenwinkel:

1. Da es sich um eine Raute handelt, gilt: $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$
2. Berechnung des Winkels $\alpha$ (= $\gamma$):

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}} = \frac{4}{3}$$
$$\frac{\alpha}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$$
$$\frac{\alpha}{2} = 53{,}1° \qquad | \cdot 2$$
$$\alpha = 106{,}2°$$

Damit gilt: $\alpha = \gamma = 106{,}2°$

3. Berechnung des Winkels β (= δ):

$$\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{\beta}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\frac{\beta}{2} = 36{,}9° \qquad | \cdot 2$$

$$\beta = 73{,}8°$$

Damit gilt: $\beta = \delta = 73{,}8°$

Berechnung des Umfangs und des Flächeninhalts der Raute:

1. $\overline{AM}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{AB}^2$ (Pythagoras)

$$3^2 + 4^2 = \overline{AB}^2 \qquad | \sqrt{\phantom{x}}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$\overline{AB} = 5 \text{ cm}$$

Die Länge $\overline{AB}$ beträgt 5 cm.

2. Da in einer Raute alle vier Seitenlängen gleich groß sind, gilt für den Umfang der Raute:
$u = 4 \cdot 5$
$u = 20$ cm

Der Umfang beträgt 20 cm.

3. Die Längen der beiden Diagonalen der Raute können aus der Grafik abgelesen werden:
$\overline{AC} = 6$ cm und $\overline{BD} = 8$ cm

4. Damit gilt für den Flächeninhalt der Raute:

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f \qquad \text{(Formel für den Flächeninhalt einer Raute)}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8$$

$$A = 24 \text{ cm}^2$$

Der Flächeninhalt der Raute beträgt 24 cm².

## Aufgabe 2

$$V_{Ke} = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot h$$

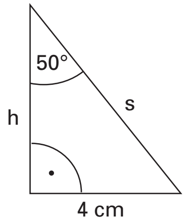
$$M = r \pi s$$

**1. Schritt:**
Berechnung der Höhe h:

$$\tan(50°) = \frac{4\text{ cm}}{h}$$

$$h = \frac{4\text{ cm}}{\tan(50°)}$$

$$h = 3{,}36\text{ cm}$$




**2. Schritt:**
Berechnung der Mantellinie s:

**I. Möglichkeit**

$$\sin(50°) = \frac{4\text{ cm}}{s}$$

$$s = \frac{4\text{ cm}}{\sin(50°)}$$

$$s = 5{,}22\text{ cm}$$

**II. Möglichkeit**

$$s^2 = (4\text{ cm})^2 + (3{,}36\text{ cm})^2$$

$$s = 5{,}22\text{ cm}$$

**3. Schritt:**
Berechnung des Inhalts der Mantelfläche M:

$$M = 4\text{ cm} \cdot \pi \cdot 5{,}22\text{ cm}$$

$$M = 65{,}60\text{ cm}^2$$

**4. Schritt:**
Berechnung des Volumens V:

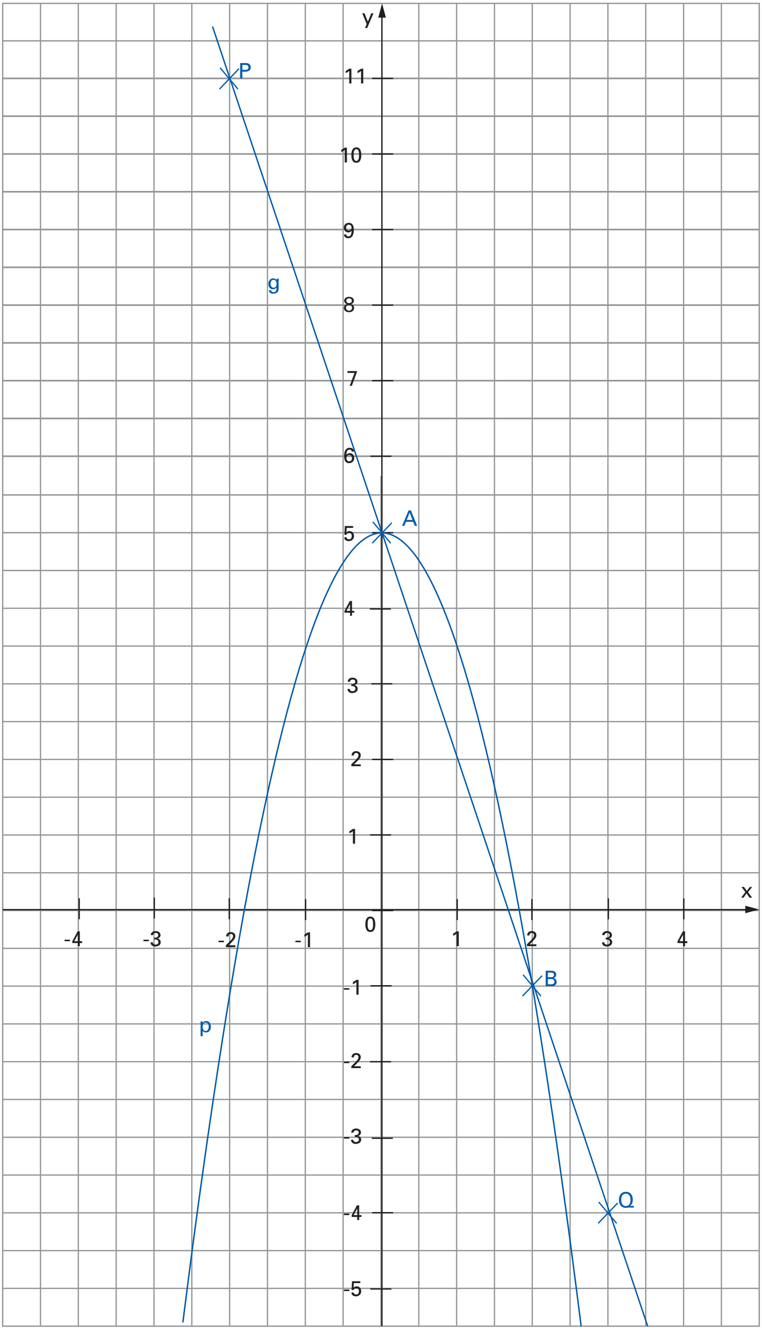
$$V = \frac{1}{3} \cdot (4\text{ cm})^2\, \pi \cdot 3{,}36\text{ cm}$$

$$V \approx 56{,}30\text{ cm}^3$$

## Aufgabe 3

Wertetabelle für die Parabel p:

| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | -8,5 | -1 | 3,5 | 5 | 3,5 | -1 | -8,5 |


y
x
P
g
A
B
Q
p
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4

Aufstellen der Gleichung von g:

1. Ansatz: $y = mx + c$

   $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4 - 11}{3 - (-2)} = \frac{-15}{3 + 2} = \frac{-15}{5} = -3$

   Damit gilt: g: $y = -3x + c$

2. Punktprobe (z. B.) mit P (-2 | 11):

   $-3 \cdot (-2) + c = 11$

   $6 + c = 11 \qquad | -6$

   $c = 5$

Damit hat die Gerade g die Gleichung $y = -3x + 5$.

Berechnung aller Schnittpunkte von p und g:

$-1{,}5x^2 + 5 = -3x + 5 \qquad | -5 \quad | +3x$

$-1{,}5x^2 + 3x = 0 \qquad | : (-1{,}5)$

$x^2 - 2x = 0 \qquad$ | ausklammern

$x \cdot (x - 2) = 0 \qquad$ | Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0; \quad x_2 = 2$

Einsetzen der beiden Lösungen $x_1$ und $x_2$, z. B. in die Geradengleichung g, ergibt:

$y_1 = -3 \cdot 0 + 5 = 5$

$y_2 = -3 \cdot 2 + 5 = -1$

Damit gilt für die beiden Schnittpunkte A und B von p und g: A (0 | 5) und B (2 | -1)

**Aufgabe 4**

Berechnung des Endkapitals nach 6 Jahren:

$K_0 = 15\,000;\ \ n = 6;\ \ q = \left(1 + \frac{0{,}8}{100}\right) = 1{,}008$

Folglich gilt mit der Zinseszinsformel:
$K_6 = 15\,000 \cdot 1{,}008^6$
$K_6 = 15\,734{,}55$

Das Guthaben beträgt nach 6 Jahren 15 734,55 €.

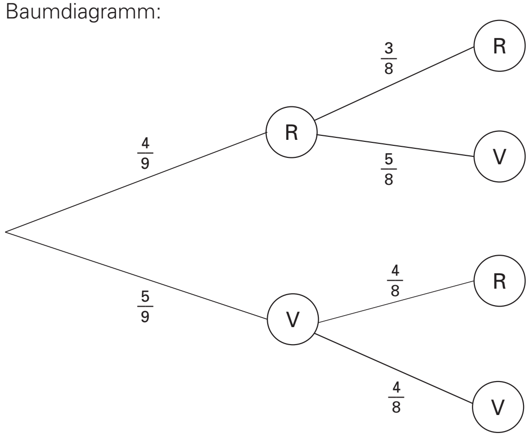
Berechnung des Zinssatzes der Bank in den Jahren 7 bis 12:
Das Guthaben ist nach 6 Jahren auf 15 734,55 € angewachsen. Vom Beginn des 7. Jahres bis zum Ende der Laufzeit (am Ende des 12. Jahres) gilt ein höherer Zinssatz. Das nach 6 Jahren erzielte Guthaben wird nun für weitere (10 – 6 =) 4 Jahre zu dem höheren Zinssatz verzinst. Deshalb gilt für diesen Zeitraum ($K_0$ ist hier das Guthaben nach 6 Jahren bzw. zu Beginn des 7. Jahres):
$K_0 = 15\,734{,}55;\ \ n = 4;\ \ K_4 = 16\,500;\ \ p = \text{gesucht}$

$$
\begin{aligned}
K_4 &= K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^4 \\
16\,500 &= 15\,734{,}55 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^4 && \mid :15\,734{,}55 \\
1{,}04865 &= \left(1 + \frac{p}{100}\right)^4 && \mid \sqrt[4]{\ } \\
\sqrt[4]{1{,}04865} &= 1 + \frac{p}{100} && \mid -1 \\
0{,}0119 &= \frac{p}{100} && \mid \cdot 100 \\
1{,}19\ \% &= p
\end{aligned}
$$

Für die Jahre 7 bis 12 bietet die Bank einen Zinssatz von 1,19 %.

**Aufgabe 5**

Baumdiagramm:

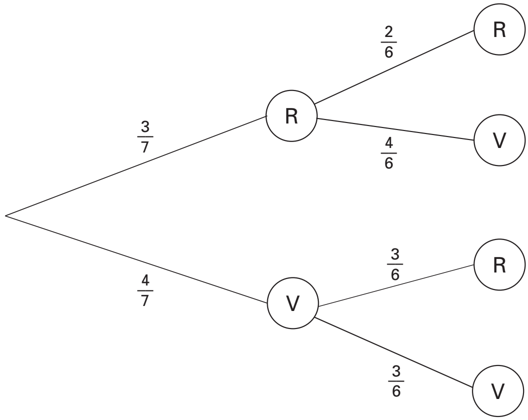


Wie man dem Baumdiagramm entnehmen kann, liegen zu Beginn 5 T-Shirts mit V-Ausschnitt und 4 T-Shirts mit Rundhalskragen im Schrank.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit, jeweils ein T-Shirt der beiden Sorten herauszugreifen:
P(„jeweils ein T-Shirt der beiden Sorten“)

$= P(V;\ R) + P(R;\ V) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{40}{72} = 55{,}6\ \%$

Berechnung der Wahrscheinlichkeit, ein weiteres Mal jeweils ein T-Shirt der beiden Sorten herauszugreifen, nachdem Robin schon jeweils ein T-Shirt der beiden Sorten herausgenommen hat: Nun liegen noch 4 T-Shirts mit V-Ausschnitt und 3 T-Shirts mit Rundhalskragen im Schrank.




P(„jeweils ein T-Shirt der beiden Sorten“)

$= P(V;\ R) + P(R;\ V) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{24}{42} = 57{,}1\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit ist etwas höher als zuvor.

**Aufgabe 6**

| | Wahr | Falsch | Nicht entscheidbar |
|---|---|---|---|
| 18 Säue haben im vergangenen Jahr jeweils 13 Ferkel geworfen. | | x | |
| 41 Säue haben im vergangenen Jahr jeweils mehr als 27 Ferkel geworfen. | | x | |
| 56 Säue haben im vergangenen Jahr jeweils höchstens 18 Ferkel geworfen. | x | | |
| Jedes Jahr ist die relative Häufigkeit für insgesamt 22 geworfene Ferkel unter den Säuen am höchsten. | | | x |

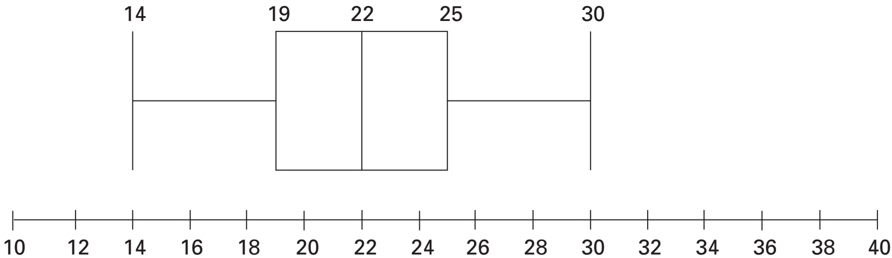
Vergleich der beiden Diagramme:
Das zweite Diagramm unterscheidet sich von dem weiter oben abgebildeten dadurch, dass die Hochachse nicht bei 0, sondern bei 7 beginnt. Dadurch werden die Datenwerte in ihrem relativen Verhältnis zueinander „verfälscht“ dargestellt. Es entsteht z. B. der Eindruck, dass die Säule für 22 Ferkel (26 Säue) mehr als dreimal so hoch ist wie die Säule für 18 Ferkel (13 Säue), obwohl 26 exakt das Doppelte von 13 ist. Dieser verfälschte Eindruck entsteht auch, wenn man andere Säulen miteinander vergleicht. Das hier abgebildete Diagramm vermittelt also den falschen Eindruck, dass es relativ gesehen **sehr viele Säue** gibt, die z. B. 21 oder 22 Ferkel geworfen haben, aber nur **sehr wenige**, die z. B. 14 oder 29 Ferkel geworfen haben. Dies ist aber eine „Verzerrung“ der wahren Zahlenverhältnisse.

Kennwerte und Boxplot:
Minimum: 14
Unteres Quartil $q_u$: $\frac{1}{4} \cdot 251 = 62{,}75$. Also ist $q_u$ der 63. Rangplatz in der Rangliste. Dieser 63. Rangplatz befindet sich in der Säule mit 19 Ferkeln. Also gilt: $q_u = 19$

Zentralwert (Median) z: $\frac{1}{2} \cdot 251 = 125{,}5$. Also ist z der 126. Rangplatz in der Rangliste. Dieser 126. Rangplatz befindet sich in der Säule mit 22 Ferkeln. Also gilt: z = 22

Oberes Quartil $q_o$: $\frac{3}{4} \cdot 251 = 188{,}25$. Also ist $q_o$ der 189. Rangplatz in der Rangliste. Dieser 189. Rangplatz befindet sich in der Säule mit 25 Ferkeln. Also gilt: $q_o = 25$
Maximum: 30

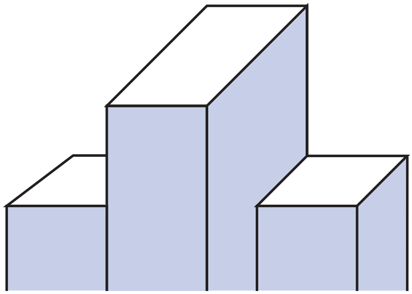
Boxplot:



## Teil B

### Aufgabe 1

a)



Es ist $\overline{EC} = \overline{AC} - \overline{AE}$.

Berechnung von $\overline{AB}$:

Betrachten Sie das Dreieck △ ABD:

$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2$ (Pythagoras)

$\overline{AB}^2 = (10\text{ cm})^2 + (8\text{ cm})^2$

$\overline{AB}^2 = 164\text{ cm}^2$

$\overline{AB} = \sqrt{164\text{ cm}^2} \approx 12{,}81\text{ cm}$

Berechnung von $\alpha_1$:

$$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{GK}{AK}}$$

$$\tan(\alpha_1) = \frac{\overline{DB}}{\overline{AD}}$$

$\tan(\alpha_1) = 0{,}8$

$\alpha_1 = 38{,}66°$

und damit

$\alpha_2 = \alpha_1 - \alpha = 38{,}66° - 20° = 18{,}66°$

Berechnung von $\overline{AC}$:

Betrachten Sie das Dreieck △ ABC.

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{AK}{Hy}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

$$\cos(20°) = \frac{12{,}81\text{ cm}}{\overline{AC}}$$

$$\overline{AC} = \frac{12{,}81\text{ cm}}{\cos(20°)}$$

$\overline{AC} = 13{,}63\text{ cm}$

Berechnung von $\overline{AE}$:

Betrachten Sie das Dreieck △ AED.

$$\cos(\alpha_2) = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}$$

$$\cos(18{,}66°) = \frac{10\text{ cm}}{\overline{AE}}$$

$$0{,}95 = \frac{10\text{ cm}}{\overline{AE}}$$

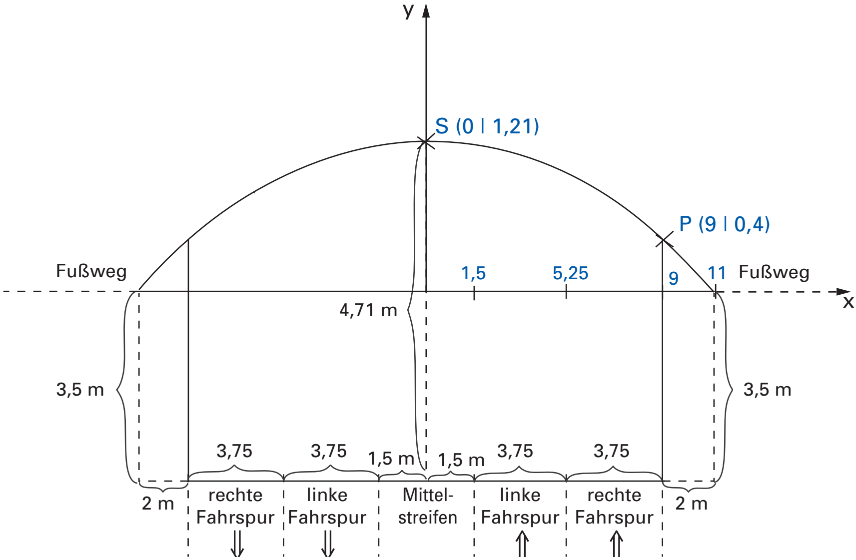
$$\overline{AE} = \frac{10\text{ cm}}{0{,}95} = 10{,}53\text{ cm}$$

Damit ist:

$\overline{EC} = \overline{AC} - \overline{AE}$

$= 13{,}63\text{ cm} - 10{,}53\text{ cm} = 3{,}1\text{ cm}$

b) Das Schaubild verdeutlicht alle nachfolgenden Überlegungen und Berechnungen:




Die y-Achse ist die Symmetrieachse der Parabel, sodass man sich bei den folgenden Berechnungen auf einen Ast (hier: den rechten) der Parabel beschränken kann.
Bestimmung der Parabel:
4,71 m – 3,5 m = 1,21 m
Scheitel (0 | 1,21)

Vorläufige Parabelgleichung:
$y = a \cdot (x - 0)^2 + 1{,}21 = a \cdot x^2 + 1{,}21$

Die positive Nullstelle der Parabel liegt bei x = 1,5 + 3,75 + 3,75 + 2, also bei x = 11.
Setzt man diesen x-Wert in die Parabelgleichung ein, so ergibt sich:

$$0 = a \cdot 11^2 + 1{,}21$$
$$121a = -1{,}21$$
$$a = -0{,}01$$

Damit lautet die vollständige Parabelgleichung: $y = -0{,}01 \cdot x^2 + 1{,}21$

Koordinaten von P (= niedrigster Punkt der Parabel, der noch oberhalb der rechten Fahrspur auf dem rechten Ast liegt):
x-Koordinate von P: x = 1,5 + 3,75 + 3,75 = 9
y-Koordinate von P: $y = -0{,}01 \cdot 9^2 + 1{,}21 = 0{,}4$
Höhe von P oberhalb der Fahrspur: 3,50 m + 0,4 m = 3,90 m
Es gibt also Teile der Brücke oberhalb der Fahrspuren, die die Mindesthöhe von 4,10 m <u>nicht</u> erreichen.

## Aufgabe 2

a) Berechnung des Radius einer Billardkugel:

1. Volumen einer Kugel:

$V = \frac{m}{\delta} \quad \Rightarrow \quad \frac{170}{1,75} = 97,14$

Das Volumen einer Billardkugel beträgt 97,14 $cm^3$.

2. Radius einer Billardkugel:

$$\begin{aligned} V_{Kugel} &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \\ 97,4 &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 && \mid \cdot \tfrac{3}{4} \qquad \mid : \pi \\ r^3 &= 23,19 && \mid \sqrt[3]{\phantom{x}} \\ r &= 2,85 \end{aligned}$$

Der Radius einer Kugel beträgt 2,85 cm.

Bestimmung der Menge des täglich benötigten Lacks (für 500 Billardkugeln):

1. Oberflächeninhalt einer Billardkugel:
   $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 2,85^2 = 102,07$

2. Der Oberflächeninhalt von 500 Kugeln beträgt damit $500 \cdot 102,07\ cm^2 = 51\,035\ cm^2$.
   $51\,035\ cm^2 = 510,35\ dm^2 = 5,1035\ m^2$

3. Berechnung der Menge an benötigtem Lack:
   $5,1035 : 1,7 = 3$

Pro Tag werden etwa 3 Liter Lack benötigt.

b) Funktionsgleichung von $p_1$:

1. Ansatz: $p_1$: $y = ax^2 + c$:
   Der Wert für c ist die y-Koordinate des Scheitels $S_1$, also -4. Also gilt: $p_1$: $y = ax^2 - 4$

2. Die Parabel $p_1$ verläuft durch den Punkt (4 I 0). Eine Punktprobe mit diesem Punkt ergibt:

$$\begin{aligned} a \cdot 4^2 - 4 &= 0 \\ 16a - 4 &= 0 && \mid + 4 \\ 16a &= 4 && \mid : 16 \\ a &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Folglich gilt: $p_1$: $y = \frac{1}{4}x^2 - 4$

Koordinaten der Schnittpunkte P und Q von $p_1$ und $p_2$:

1. Funktionsgleichung von $p_2$: $y = (x + 2)^2 - 3$

2. Gleichsetzen der Funktionsgleichungen von $p_1$ und $p_2$:

$$\begin{aligned} (x + 2)^2 - 3 &= \frac{1}{4}x^2 - 4 && \mid -\tfrac{1}{4}x^2 \qquad \mid +4 \\ x^2 + 4x + 4 - 3 - \frac{1}{4}x^2 + 4 &= 0 && \mid \text{zusammenfassen} \\ \frac{3}{4}x^2 + 4x + 5 &= 0 && \mid \cdot \tfrac{4}{3} \\ x^2 + \frac{16}{3}x + \frac{20}{3} &= 0 && \mid \text{Lösungsformel} \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = -\frac{\frac{16}{3}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{16}{3}}{2}\right)^2 - \frac{20}{3}}$$

$$x_{1,2} = -\frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{64}{9} - \frac{60}{9}}$$

$$x_{1,2} = -\frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9}}$$

$$x_{1,2} = -\frac{8}{3} \pm \frac{2}{3}$$

$$x_1 = -\frac{8}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{10}{3} = -3\frac{1}{3}; \qquad x_2 = -\frac{8}{3} + \frac{2}{3} = -\frac{6}{3} = -2$$

Einsetzen der gefundenen Werte für $x_1$ und $x_2$, z. B. in die Gleichung von $p_2$:

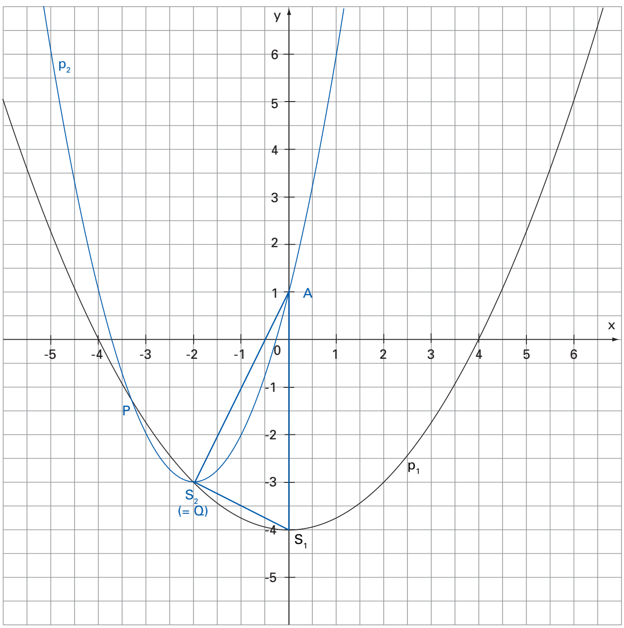
$$y_1 = \left(-\frac{10}{3} + 2\right)^2 - 3 = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 3 = \frac{16}{9} - \frac{27}{9} = -\frac{11}{9}$$

$$y_2 = (-2 + 2)^2 - 3 = -3$$

Damit gilt für die Schnittpunkte P und Q: P $\left(-\frac{10}{3} \mid -\frac{11}{9}\right)$ und Q (-2 | -3)
(Anmerkung: Q ist identisch mit $S_2$.)

Koordinaten des Schnittpunkts A von $p_2$ mit der y-Achse:
Einsetzen von x = 0 in die Gleichung von $p_2$ ergibt:
$y = (0 + 2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$

Damit gilt für den Punkt A: A (0 | 1)




Maßstab verkleinert

Flächeninhalt des Dreiecks $S_1AS_2$:

$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g$ ($h_g$ ist hier der Abstand von $S_2$ zur y-Achse)

$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{S_1A} \cdot 2$

$A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2$

$A = 5$ Flächeneinheiten

Koordinaten von T auf $p_2$:

1. Die Grundseite des Dreiecks $S_1AT$ ist ebenfalls $\overline{S_1A}$ mit 5 Längeneinheiten. Wie man der Grafik entnehmen kann, hat der gesuchte Punkt T eine x-Koordinate im Bereich $-2 \leq x \leq 0$. Da die Höhe eines Dreiecks aber nicht negativ sein kann, wird ein positives k aus dem Bereich $0 \leq k \leq 2$ mit $x = -k$ gesucht, für das gilt:

   $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{S_1A} \cdot k$

   $2{,}5 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot k$

   $2{,}5 = 2{,}5k \quad | : 2{,}5$

   $k = 1$

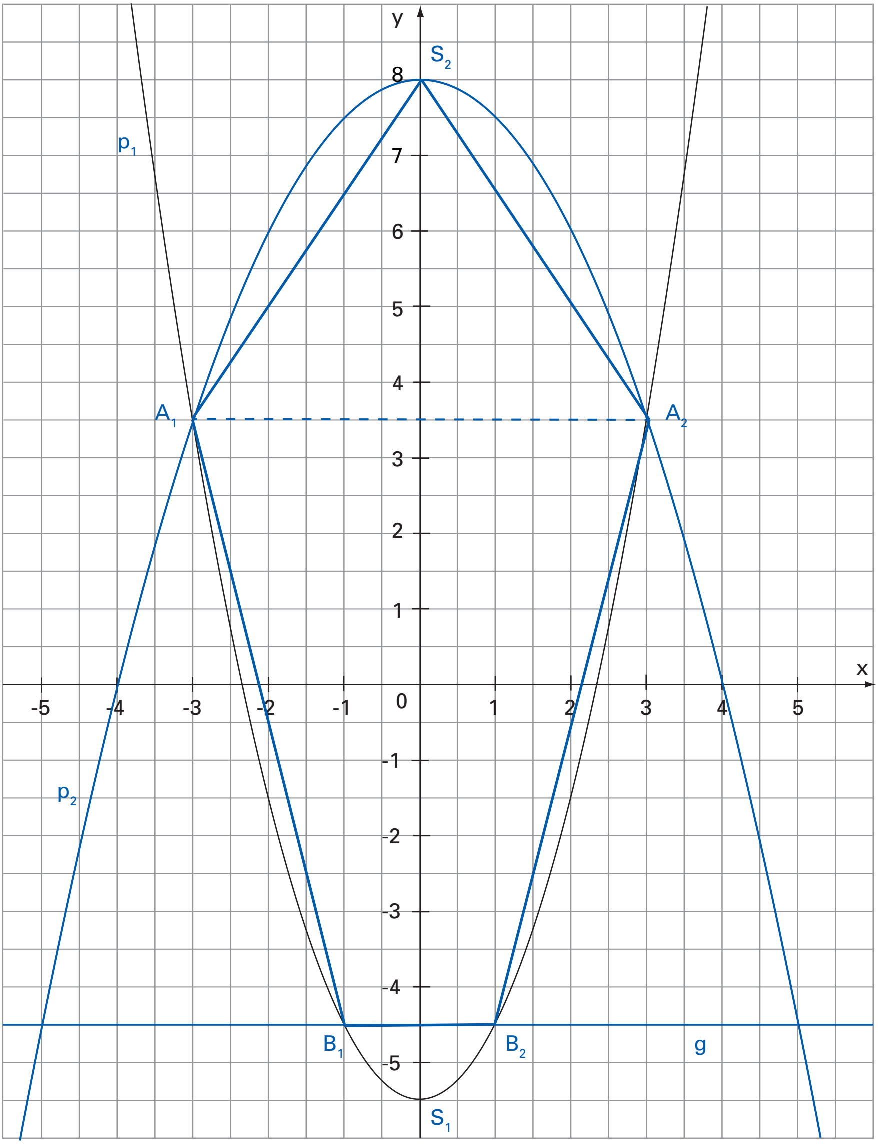
Da $x = -k$ gilt, ist $x = -1$ die gesuchte x-Koordinate von T.

2. Einsetzen der x-Koordinate -1 von T in die Funktionsgleichung von $p_2$ ergibt:
   $y = (-1 + 2)^2 - 3$
   $y = 1 - 3$
   $y = -2$

Damit gilt für den gesuchten Punkt T auf $p_2$: T (-1 | -2)

## Aufgabe 3

a)



Bestimmung des Scheitelpunkts und der Funktionsgleichung von $p_1$:
Der Scheitelpunkt kann aus der Grafik abgelesen werden: $S_1$ (0 I -5,5)
Damit gilt: $p_1$: $y = x^2 - 5,5$

Bestimmung der Funktionsgleichung und der Wertetabelle für $p_2$:
Da die y-Achse Symmetrieachse ist, gilt als Ansatz für $p_2$: $y = ax^2 + c$
Da $p_2$ bei y = 8 die y-Achse schneidet, gilt: c = 8 und damit $p_2$: $y = ax^2 + 8$
Da $p_2$ bei x = 4 die x-Achse schneidet, ergibt eine Punktprobe mit dem Punkt (4 I 0):

$$0 = a \cdot 4^2 + 8 \qquad | -8$$
$$-8 = 16a \qquad | :16$$
$$a = -0,5$$

Damit gilt: $p_2$: $y = -0,5x^2 + 8$. Die Parabel $p_2$ hat den Scheitelpunkt $S_2$ (0 I 8).

Wertetabelle für $p_2$:

| x | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | -4,5 | 0 | 3,5 | 6 | 7,5 | 8 | 7,5 | 6 | 3,5 | 0 | -4,5 |

Berechnung der Koordinaten der Schnittpunkte von $p_1$ und $p_2$:

$$x^2 - 5,5 = -0,5x^2 + 8 \qquad | +5,5 \quad | +0,5x^2$$
$$1,5x^2 = 13,5 \qquad | :1,5$$
$$x^2 = 9 \qquad | \sqrt{\phantom{x}}$$
$$x_1 = -3; \qquad x_2 = 3$$

Bestimmung der zugehörigen y-Koordinaten für $x_1$ und $x_2$ durch Einsetzen der beiden x-Werte, z. B. in die Gleichung von $p_1$:

$$y_1 = (-3)^2 - 5,5 = 9 - 5,5 = 3,5$$
$$y_2 = 3^2 - 5,5 = 9 - 5,5 = 3,5$$

Damit gilt für die Schnittpunkte von $p_1$ und $p_2$: $A_1$ (-3 I 3,5) und $A_2$ (3 I 3,5)

Berechnung der Koordinaten der Schnittpunkte von $p_1$ und g:

$$x^2 - 5,5 = -4,5 \qquad | +5,5$$
$$x^2 = 1 \qquad | \sqrt{\phantom{x}}$$
$$x_1 = -1; \quad x_2 = 1$$

Damit gilt für die Schnittpunkte von $p_1$ und g: $B_1$ (-1 I -4,5) und $B_2$ (1 I -4,5)

Prüfungen

Berechnung des Flächeninhalts des Fünfecks $A_1B_1B_2A_2S_2$:

Das Fünfeck kann in ein gleichschenkliges Trapez $A_1B_1B_2A_2$ und ein gleichschenkliges Dreieck $A_1A_2S_2$ zerlegt werden.

$$A_{Trapez} = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$$
$$A_{Trapez} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2}) \cdot (3{,}5 + 4{,}5)$$
$$A_{Trapez} = \frac{1}{2} \cdot (6 + 2) \cdot 8$$
$$A_{Trapez} = 4 \cdot 8$$
$$A_{Trapez} = 32 \text{ FE}$$

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g$$
$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_1A_2} \cdot (8 - 3{,}5)$$
$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_1A_2} \cdot 4{,}5$$
$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4{,}5$$
$$A_{Dreieck} = 13{,}5 \text{ FE}$$

Der Flächeninhalt des Fünfecks beträgt 32 FE + 13,5 FE = 45,5 Flächeneinheiten.

b) Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für „Zweimal V“ und „Zweimal T“:

$$P(\text{„Zweimal V“}) = \frac{2}{21} \cdot \frac{1}{20} = \frac{2}{420}$$
$$P(\text{„Zweimal T“}) = \frac{8}{21} \cdot \frac{7}{20} = \frac{56}{420}$$

Berechnung des Erwartungswertes:

$$E = \frac{2}{420} \cdot 20 + \frac{56}{420} \cdot 5 - 1 = \frac{40}{420} + \frac{280}{420} - \frac{420}{420} = -\frac{100}{420} = -0{,}24$$

Der (negative) Erwartungswert von -0,24 € bedeutet, dass der Betreiber im Durchschnitt pro Spiel einen Reingewinn von 0,24 € erzielt.

Berechnung des zu verändernden Gewinns für „Restliche Ereignisse“, um das Spiel fair zu gestalten:
Der Gewinn für „Restliche Ereignisse“ wird mit x bezeichnet. Damit das Spiel fair ist, muss der Erwartungswert 0 sein. Das heißt, es muss dann folgende Gleichung gelten:

$$\frac{2}{420} \cdot 20 + \frac{56}{420} \cdot 5 + \frac{362}{420} \cdot x - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{40}{420} + \frac{280}{420} + \frac{362}{420} \cdot x - 1 &= 0 && \mid \cdot 420 \\ 40 + 280 + 362x - 420 &= 0 && \mid \text{zusammenfassen} \\ 362x - 100 &= 0 && \mid + 100 \\ 362x &= 100 && \mid : 362 \\ x &= 0{,}28 \end{aligned}$$

Damit das Spiel fair ist, müsste der Gewinn für „Restliche Ereignisse“ 0,28 € betragen.