pauker.

Abschluss2023
Realschule Baden-Württemberg

Lösungen Mathematik Muster IV

Mathematik

hutt lernhilfen

10

Mathematik-Musterprüfung IV – A

Teil A1

Aufgabe 1

$\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{3}}$

$= \sqrt{\frac{54}{3}}$

$= \sqrt{18}$

$= \sqrt{9 \cdot 2}$

$= \sqrt{9} \cdot \sqrt{2}$

$= 3\sqrt{2}$

Aufgabe 2

Das erste Muster besteht aus einem Quadrat. Das zweite Muster besteht aus dem einen Quadrat des ersten Musters plus vier weiteren Quadraten. Von jedem Muster zum nächsten kommen immer vier weitere Quadrate hinzu. Also gibt es für die Anzahl an Quadraten folgende Gesetzmäßigkeit:

Muster (1): $1 + \mathbf{0} \cdot 4 = 1$
Muster (2): $1 + \mathbf{1} \cdot 4 = 5$
Muster (3): $1 + \mathbf{2} \cdot 4 = 9$
Muster (4): $1 + \mathbf{3} \cdot 4 = 13$

Daraus folgt für Muster (17): $1 + \mathbf{16} \cdot 4 = 1 + 64 = 65$
Das 17. Muster besteht aus 65 Quadraten.

Aufgabe 3

- Berechnung der Kantenlänge der (quadratischen) Wasseroberfläche:
  Es gilt: 7,5 l = 7500 cm^3. Das Wasser innerhalb der Pyramide bildet selbst auch wieder eine Pyramide. Wenn man die Kantenlänge der Wasseroberfläche mit a bezeichnet, gilt für das Volumen des Wassers:

  $$V_{Wasser} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot 9$$
  $$7500 = 3a^2 \qquad | : 3$$
  $$2500 = a^2 \qquad | \sqrt{}$$
  $$a = 50 \text{ cm}$$

  Die Kantenlänge a der Wasseroberfläche beträgt 50 cm.

Prüfungen

▶ Bestimmung der Höhe des Quaders:

$V_{Quader} = V_{Wasser}$

$$10 \cdot 10 \cdot h = 7500$$
$$100 \cdot h = 7500 \quad | : 100$$
$$h = 75 \text{ cm}$$

Die Höhe des Quaders beträgt 75 cm.

Aufgabe 4

Es handelt sich um ein zweistufiges Zufallsexperiment mit Zurücklegen.

Wenn der „Joker“ für eine 10 stehen würde, dann müsste gelten:

P(zwei Karten mit „10“) $= \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{49}$

Dies stimmt aber nicht mit der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit überein.

Wenn der „Joker“ für eine 9 stehen würde, dann müsste gelten:

P(zwei Karten mit „9“) $= \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$

Dies stimmt aber nicht mit der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit überein.

Wenn der „Joker“ für eine 8 stehen würde, dann müsste gelten:

P(zwei Karten mit „10“) $= \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{49}$

P(zwei Karten mit „9“) $= \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{49}$

Diese Ergebnisse stimmen mit beiden vorgegebenen Wahrscheinlichkeiten überein.

Dies bedeutet, dass der „Joker“ für eine 8 steht, sodass die vorgegebenen Wahrscheinlichkeiten gelten.

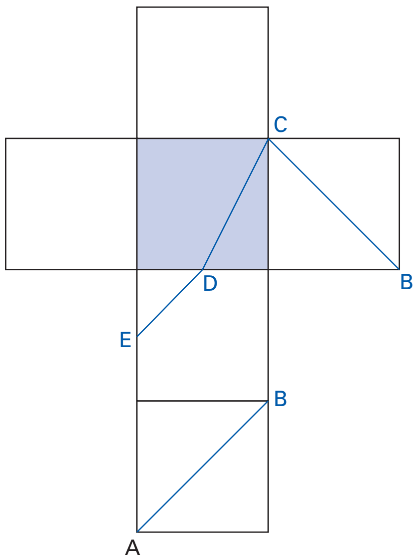
Aufgabe 5

$\sin(\alpha) = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$ $\quad$ $\sin(\beta) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

$\cos(\alpha) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ $\quad$ $\cos(\beta) = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$

$\tan(\alpha) = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$ $\quad$ $\tan(\beta) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

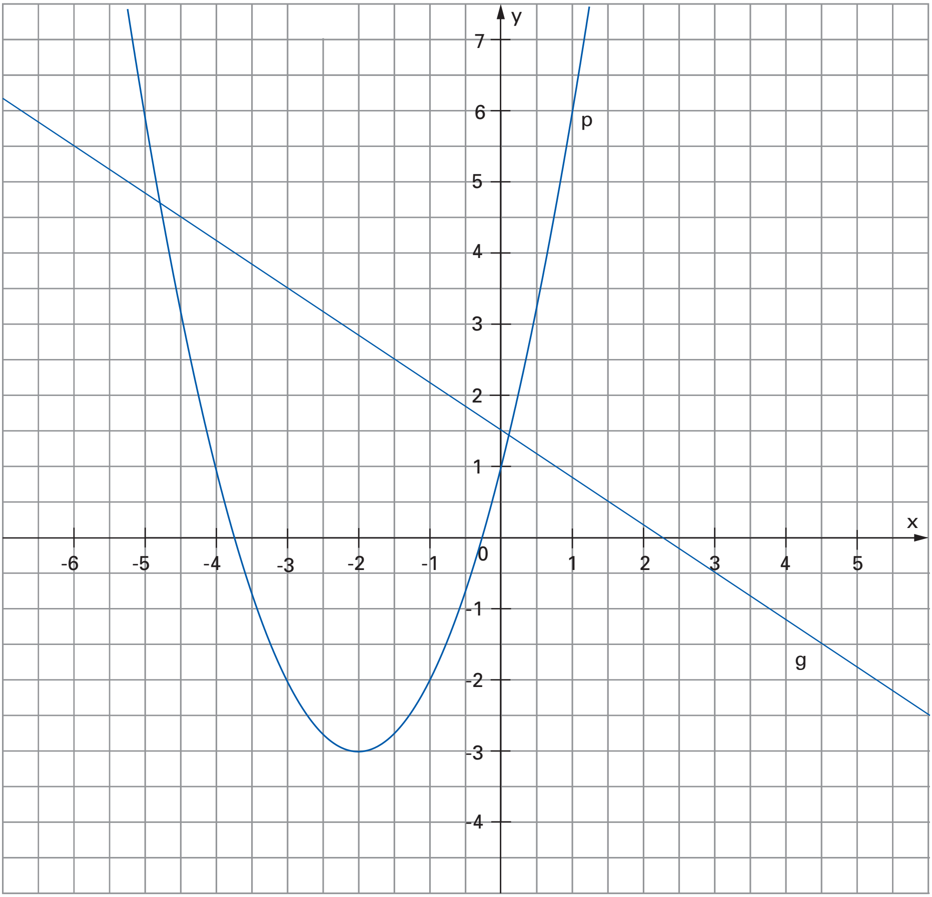
Aufgabe 6



Aufgabe 7

Fehlerbeschreibung:
Bei der Parabel p wurden beide Verschiebungen der Normalparabel (in x-Richtung und in y-Richtung) falsch ausgeführt. Um p richtig einzuzeichnen, muss die Normalparabel nicht (wie hier im Schaubild) um 2 Einheiten nach rechts und um 3 Einheiten nach oben, sondern um 2 Einheiten nach links und um 3 Einheiten nach unten verschoben werden. Der Scheitelpunkt muss folglich (-2 I -3) sein und nicht (2 I 3).
Bei der Geraden g wurden sowohl der y-Achsenabschnitt als auch die Steigung fehlerhaft verwendet. Der y-Achsenabschnitt hat nicht (wie im Schaubild) den Wert -1,5, sondern den Wert +1,5. Die Steigung der Geraden hat nicht (wie im Schaubild) den Wert $-\frac{3}{2}$, sondern den Wert $-\frac{2}{3}$.

Korrektes Schaubild:

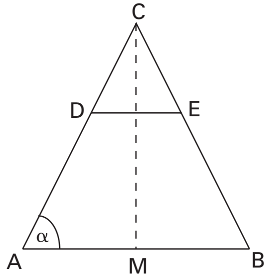


Maßstab verkleinert

Teil A2

Aufgabe 1

a)
$$\overline{AD} + \overline{DC} = \overline{AC}$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$2 \cdot \overline{DC} + \overline{DC} = 15\text{ cm}$$
$$3 \cdot \overline{DC} = 15\text{ cm} \qquad | : 3$$
$$\overline{DC} = 5\text{ cm} \qquad \Rightarrow \quad \overline{AD} = 10\text{ cm}$$

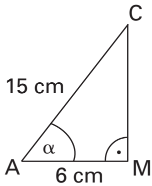


b) Nach dem **Strahlensatz** gilt:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CA}} \qquad | \cdot \overline{AB}$$
$$\overline{DE} = \frac{\overline{CD} \cdot \overline{AB}}{\overline{CA}}$$
$$\overline{DE} = \frac{5\text{ cm} \cdot 12\text{ cm}}{15\text{ cm}}$$
$$\overline{DE} = 4\text{ cm}$$

c)
$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{AK}{Hy}}$$

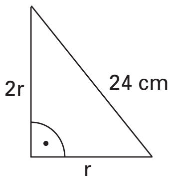
$$\cos(\alpha) = \frac{6\text{ cm}}{15\text{ cm}} \qquad | \cos^{-1}$$
$$\alpha = 66{,}42°$$

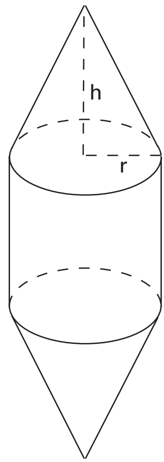


Aufgabe 2

a) **1. Schritt:**
Berechnung von Radius r und Höhe h:

$h = 2r$





Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$r^2 + (2r)^2 = (24\text{ cm})^2$$
$$5r^2 = 576\text{ cm}^2 \qquad \mid :5$$
$$r^2 = 115{,}2\text{ cm}^2 \qquad \mid \sqrt{}$$
$$r = 10{,}73\text{ cm} \quad \Rightarrow \quad h = 21{,}46\text{ cm}$$

2. Schritt:
Berechnung des Volumens:
$V = V_Z + 2 \cdot V_K$

Zylinder
$r = 10{,}73$ cm $h = 21{,}46$ cm

$$\boxed{V_Z = r^2\pi \cdot h}$$

$V_Z = (10{,}73\text{ cm})^2\,\pi \cdot 21{,}46\text{ cm}$

$V_Z = 7762{,}10\text{ cm}^3$

Kegel
$r = 10{,}73$ cm $h = 21{,}46$ cm

$$\boxed{V_K = \frac{1}{3}\,r^2\pi \cdot h}$$

$V_K = \frac{1}{3} \cdot (10{,}73\text{ cm})^2 \cdot \pi \cdot 21{,}46\text{ cm}$
$V_K = 2587{,}37\text{ cm}^3$

$V = 7762{,}10\text{ cm}^3 + 2 \cdot 2587{,}37\text{ cm}^3$
$V = 12\,936{,}84\text{ cm}^3$

Das Volumen beträgt $12\,936{,}84\text{ cm}^3$.

b) Die Oberfläche wird von der Zylindermantelfläche und den beiden Kegelmantelflächen gebildet.

Zylinder

$\boxed{M_Z = 2r \cdot \pi \cdot h}$

$r = 10{,}73$ cm $\quad h = 21{,}46$ cm

$M_Z = 2 \cdot 10{,}73 \text{ cm} \cdot \pi \cdot 21{,}46 \text{ cm}$
$M_Z = 1446{,}80 \text{ cm}^2$

Kegel

$\boxed{M_K = r \cdot \pi \cdot s}$

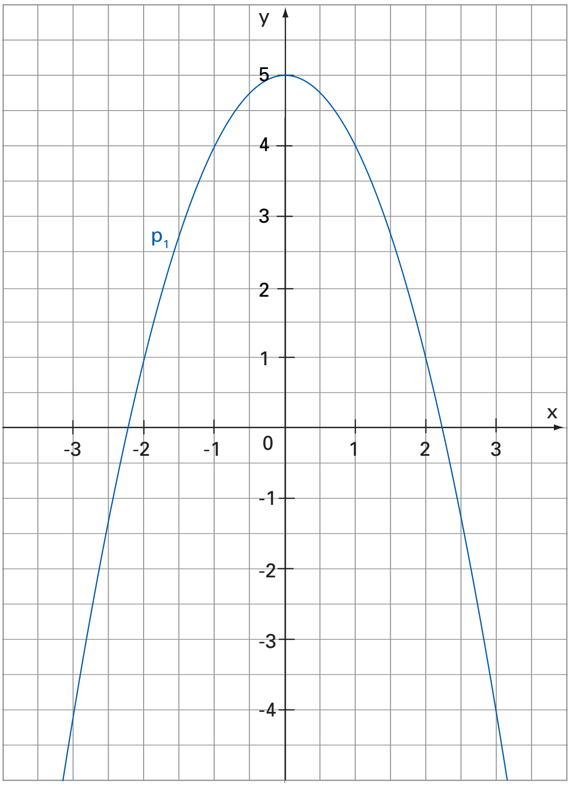
$r = 10{,}73$ cm $\quad s = 24$ cm

$M_K = 10{,}73 \text{ cm} \cdot \pi \cdot 24 \text{ cm}$
$M_K = 809{,}02 \text{ cm}^2$

$O = M_Z + 2 \cdot M_K$
$O = 1446{,}80 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 809{,}02 \text{ cm}^2$
$O = 3064{,}84 \text{ cm}^2$

Das Werkstück hat einen Oberflächeninhalt von $3064{,}84 \text{ cm}^2$.

Aufgabe 3



Maßstab verkleinert

Aufstellen der Gleichungen von p_1 und p_2:
Gleichung von p_1: $y = -x^2 + 5$
Da S_2 (2 I 3) der Scheitelpunkt von p_2 ist, hat p_2 die Gleichung $y = (x-2)^2 + 3$.

Berechnung aller Schnittpunkte von p_1 und p_2:

$$
\begin{aligned}
(x-2)^2 + 3 &= -x^2 + 5 && \text{I ausmultiplizieren} \\
x^2 - 4x + 4 + 3 &= -x^2 + 5 && \text{I zusammenfassen} \\
x^2 - 4x + 7 &= -x^2 + 5 && \text{I } + x^2 \quad \text{I } - 5 \\
2x^2 - 4x + 2 &= 0 && \text{I} : 2 \\
x^2 - 2x + 1 &= 0 && \text{I Binomische Formel} \\
(x-1)^2 &= 0 && \text{I } \sqrt{} \\
x - 1 &= 0 && \text{I } +1 \\
x &= 1
\end{aligned}
$$

Einsetzen der (einzigen) Lösung $x = 1$, z. B. in die Gleichung von p_1, ergibt: $y = -1^2 + 5 = 4$
Damit gilt für den einzigen Schnittpunkt A von p_1 und p_2: A (1 I 4)

Aufgabe 4

Berechnung der von Frau Habel erzielten Zinsen:

$K_0 = 10\,000;\ n = 10;\ q = \left(1 + \frac{0{,}9}{100}\right) = 1{,}009$

Folglich gilt mit der Zinseszinsformel:
$K_{10} = 10\,000 \cdot 1{,}009^{10}$
$K_{10} = 10\,937{,}34$
$K_{10} - K_0 = 10\,937{,}34 - 10\,000 = 937{,}34$

Frau Habel erzielt in 10 Jahren insgesamt 937,34 € Zinsen.

Berechnung der von Herrn Habel erzielten Zinsen:

$K = 10\,000;\ p = 0{,}9\ \%$

$Z = \frac{K \cdot i \cdot p}{100}$

$Z = \frac{10\,000 \cdot 1 \cdot 0{,}9}{100}$

$Z = 90$

10 Jahre lang lässt sich Herr Habel am Ende jedes Jahres 90 € Zinsen auszahlen. Nach 10 Jahren erzielt er also insgesamt 10 · 90 € = 900 € Zinsen.

Berechnung des Prozentsatzes, zu dem die von Frau Habel erzielten Zinsen die von Herrn Habel erzielten Zinsen übersteigen:

$937{,}34 - 900 = 37{,}34$

$$W = \frac{G \cdot p}{100}$$

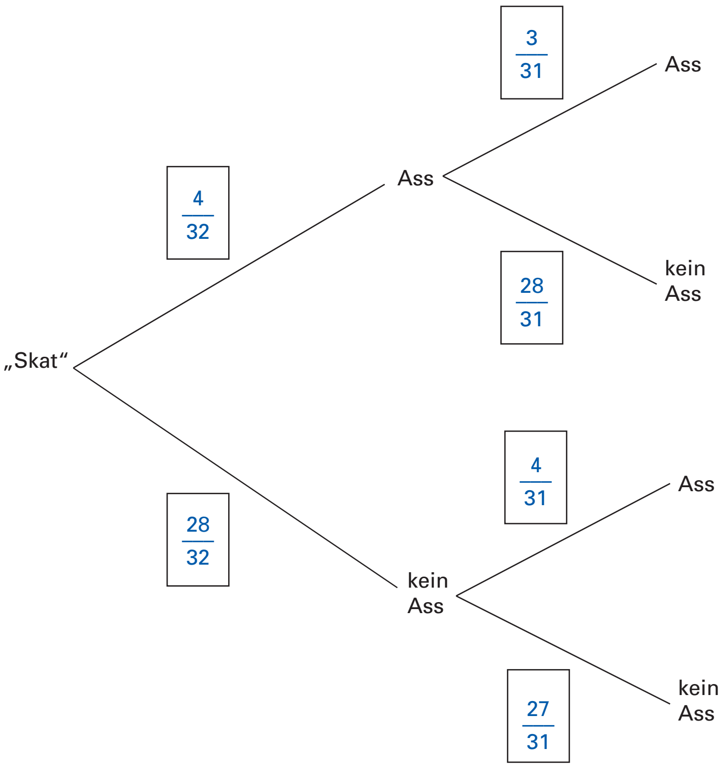
$$37{,}34 = \frac{900 \cdot p}{100} \qquad | \cdot 100 \qquad | : 900$$

$$p \approx 4{,}1\ \%$$

Die von Frau Habel erzielten Zinsen übersteigen die von Herrn Habel erzielten Zinsen um etwa 4,1 %.

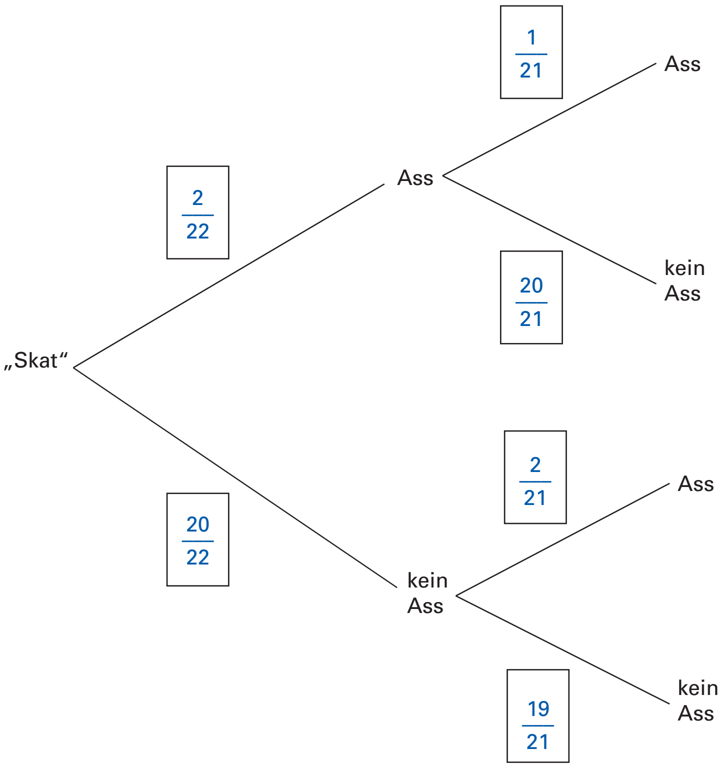
Aufgabe 5

Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass bei 32 verdeckten Karten im „Skat" zwei Asse liegen:



$$P(\text{„Zwei Asse im Skat"}) = P(\text{Ass; Ass}) = \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} = \frac{12}{992} = 1{,}2\ \%$$

Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass im Skat mindestens ein Ass liegt, wenn eine Spielerin bereits ihre 10 Karten aufgedeckt hat und wenn zwei dieser 10 Karten Asse sind:
Da die Spielerin bereits 10 Karten offen in der Hand hält, sind für sie nur noch insgesamt 32 – 10 = 22 Karten verdeckt. Diese Person hält bereits zwei Asse in der Hand, also befinden sich unter den verbliebenen 22 verdeckten Karten nur noch zwei weitere Asse. Damit gehört zu diesem Zufallsexperiment das folgende Baumdiagramm:



I. Möglichkeit
P(„Es ist mindestens ein Ass im Skat“)
= 1 – P(„Es ist kein Ass im Skat“)
= 1 – P(kein Ass; kein Ass)
$= 1 - \frac{20}{22} \cdot \frac{19}{21} = 1 - \frac{380}{462} = \frac{82}{462} = 17{,}7\ \%$

II. Möglichkeit
P(„Es ist mindestens ein Ass im Skat“)
= P(Ass; Ass) + P(Ass; kein Ass) + P(kein Ass; Ass)
$= \frac{2}{22} \cdot \frac{1}{21} + \frac{2}{22} \cdot \frac{20}{21} + \frac{20}{22} \cdot \frac{2}{21} = \frac{82}{462} = 17{,}7\ \%$

Aufgabe 6

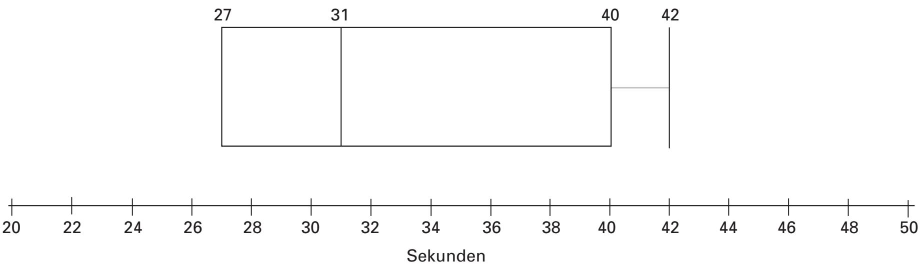
Vervollständigen der Rangliste für die Klasse 10c:

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
s	24	27	27	27	28	28	29	29	29	30	30	31	31	37	40	40	42	43	48
						29		30	30				32						
													33						
													34						
													35						
													36						
													37						

(Auf jedem Rangplatz sind alle möglichen Ergänzungen eingetragen.)

Boxplot für die Laufergebnisse der Mädchen in der Klasse 10c:
Minimum: 27
Unteres Quartil q_u: 27
Zentralwert (Median): 31
Oberes Quartil q_o: 40
Maximum: 42

200-Meter-Lauf: Mädchen der Klasse 10c



Besonderheit dieses Boxplots:
Das Besondere an dem Boxplot für die Mädchen der Klasse 10c ist, dass er links keine Antenne hat. Dies bedeutet, dass das Minimum und das untere Quartil q_u denselben Wert haben müssen. Dieser Wert beträgt 27 s.

Begründung der Besonderheit dieses Boxplots:
Drei der elf Mädchen in der 10c benötigten beim 200-Meter-Lauf den minimalen Wert von 27 Sekunden. Wenn man das untere Quartil berechnet, ergibt sich: 11 : 4 = 2,75. Der 3. Rangplatz ist folglich das untere Quartil, also gilt q_u = 27. Somit haben das Minimum und das untere Quartil denselben Wert.

Teil B

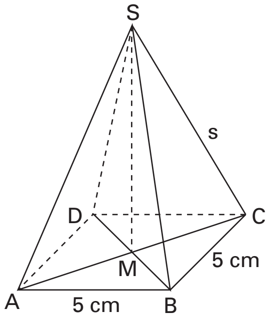
Aufgabe 1

a) **1. Schritt:**
Berechnung der Gesamtlänge l des Drahtes:

$l = 4 \cdot 8\text{ cm} + 4 \cdot 6\text{ cm} + 4 \cdot 4\text{ cm}$
$l = 72\text{ cm}$

2. Schritt:
Berechnung der Seitenkante s der Pyramide:

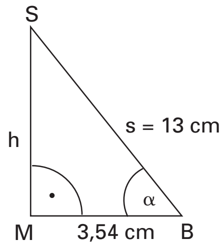
$72\text{ cm} - 4 \cdot 5\text{ cm} = 52\text{ cm}$
$52\text{ cm} : 4 = 13\text{ cm}$
$\Rightarrow\ s = 13\text{ cm}$



3. Schritt:
Berechnung der Höhe $h = \overline{MS}$:

$\overline{MB}$ ist die Länge der halben Diagonale im Quadrat ABCD.

$\boxed{d = a\sqrt{2}}$ $\quad\Rightarrow\quad d = 5\text{ cm} \cdot \sqrt{2}$
$d = 7{,}07\text{ cm}$
$\Rightarrow\quad \overline{MB} = 3{,}54\text{ cm}$



Nach dem Satz des Pythagoras gilt:
$h^2 = (13\text{ cm})^2 - (3{,}54\text{ cm})^2$
$h\ = 12{,}51\text{ cm}$

I. Möglichkeit

$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{GK}{AK}}$

$\tan(\alpha) = \frac{12{,}51\text{ cm}}{3{,}54\text{ cm}}$
$\alpha = 74{,}2°$

II. Möglichkeit

$\boxed{\sin(\alpha) = \frac{GK}{Hy}}$

$\sin(\alpha) = \frac{12{,}51\text{ cm}}{13\text{ cm}}$
$\alpha = 74{,}2°$

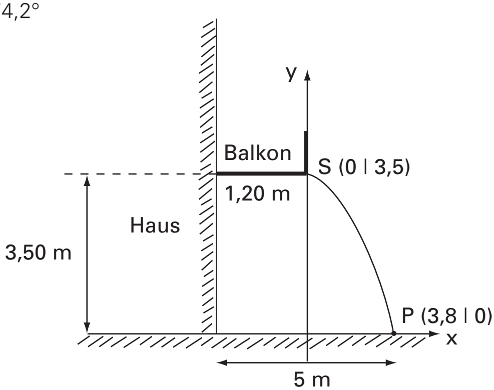
b) $p: y = ax^2 + c$

S eingesetzt:
$3{,}5 = a \cdot 0^2 + c$
$c = 3{,}5$

$\Rightarrow\ p: y = ax^2 + 3{,}5$

P eingesetzt:
$0 = a \cdot 3{,}8^2 + 3{,}5 \qquad | -3{,}5$
$-3{,}5 = 14{,}44\,a \qquad | : 14{,}44$
$a = -0{,}24$

$\Rightarrow\ p: y = -0{,}24x^2 + 3{,}5$



Berechnung der positiven Nullstelle der Funktion mit der Gleichung $y = -0{,}15x^2 + 3{,}5$:

$$
\begin{aligned}
-0{,}15x^2 + 3{,}5 &= 0 && \mid -3{,}5 \\
-0{,}15x^2 &= -3{,}5 && \mid :(-0{,}15) \\
x^2 &= 23{,}3 && \mid \sqrt{} \\
x_1 &= 4{,}8
\end{aligned}
$$

($x_2 = -4{,}8$ kann hier ignoriert werden, weil Längen nicht negativ sein können.)

Bestimmung der Entfernung zwischen dem ebenerdigen Punkt des Glasdachs und der Hauswand:

$d = 1{,}2 + x_1$

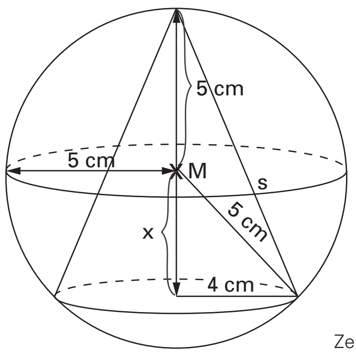
$d = 1{,}2 + 4{,}8$

$d = 6$ m

Die Entfernung beträgt etwa 6 m.

Aufgabe 2

a) Zunächst werden in der Zeichnung Bezeichnungen, Maßangaben und Hilfslinien ergänzt, die für die Berechnungen notwendig sind.



Zeichnung nicht maßstabsgetreu

Generelles Vorgehen:

1. Zunächst kann man x bestimmen.
2. Dann kann mithilfe des gefundenen Wertes für x zunächst die Höhe h und dann die Seitenkante s des Kegels berechnet werden.
3. Anschließend wird mit der so errechneten Seitenkante s der gesuchte Oberflächeninhalt des Kegels ermittelt.

1. Mit dem **Satz des Pythagoras** kann x bestimmt werden:

$$
\begin{aligned}
x^2 + (4\text{ cm})^2 &= (5\text{ cm})^2 && \mid -(4\text{ cm})^2 \\
x^2 &= 25\text{ cm}^2 - 16\text{ cm}^2 && \mid \sqrt{} \\
x = \sqrt{25\text{ cm}^2 - 16\text{ cm}^2} &= \sqrt{9\text{ cm}^2} \\
x &= 3\text{ cm}
\end{aligned}
$$

2. Für die Höhe h des Kegels gilt (siehe Zeichnung): h = 5 cm + x = 5 cm + 3 cm = 8 cm
Mit dem **Satz des Pythagoras** gilt dann (siehe Zeichnung):
$s^2 = r^2 + h^2$
$s^2 = (4\ \text{cm})^2 + (8\ \text{cm})^2$
$s^2 = 16\ \text{cm}^2 + 64\ \text{cm}^2$
$s^2 = 80\ \text{cm}^2 \qquad | \sqrt{\ }$
$s = \sqrt{80\ \text{cm}^2}$
$s \approx 8{,}9\ \text{cm}$

3. Mit der Formel für den Oberflächeninhalt eines Kegels $O = r\pi(r + s)$ kann nun die gesuchte gold eingefärbte Fläche des Kegels ermittelt werden.

$O = r\pi(r + s)$
$O \approx (4\ \text{cm}) \cdot (3{,}14) \cdot (4\ \text{cm} + 8{,}9\ \text{cm})$
$O \approx 12{,}56\ \text{cm} \cdot 12{,}9\ \text{cm}$
$O \approx 162\ \text{cm}^2$

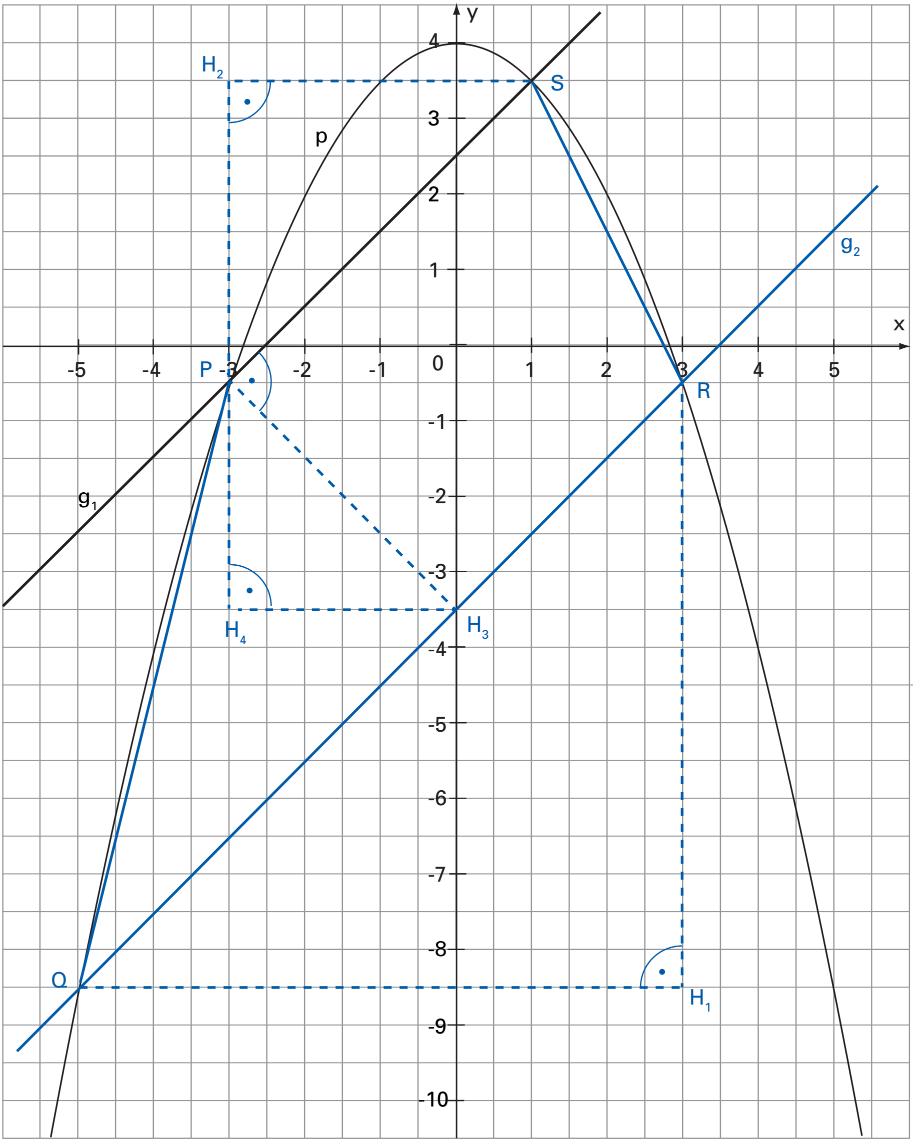
Der Flächeninhalt der gold eingefärbten Fläche des Kegels beträgt etwa $162\ \text{cm}^2$.

b) Ablesen der Koordinaten der Schnittpunkte P und S von p und g_1: P (-3 | -0,5) und S (1 | 3,5)

Koordinaten der Schnittpunkte Q und R von p und g_2:
$-0{,}5x^2 + 4 = x - 3{,}5 \qquad | -x \quad | +3{,}5$
$-0{,}5x^2 - x + 7{,}5 = 0 \qquad | \cdot (-2)$
$x^2 + 2x - 15 = 0 \qquad |$ Lösungsformel
$x_{1,2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-15)}$
$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 15}$
$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{16}$
$x_{1,2} = -1 \pm 4$
$x_1 = -1 - 4 = -5$
$x_2 = -1 + 4 = 3$

Einsetzen der gefundenen Werte für x_1 und x_2, z. B. in die Gleichung von g_2:
$y_1 = -5 - 3{,}5 = -8{,}5$
$y_2 = 3 - 3{,}5 = -0{,}5$

Damit gilt für die Schnittpunkte Q und R: Q (-5 | -8,5) und R (3 | -0,5)



Viereck PQRS (siehe Lösungsgrafik):
Da die beiden Geraden g_1 und g_2 dieselbe Steigung (m = 1) haben, sind sie parallel. Deshalb sind auch die Seiten $\overline{PS}$ und $\overline{QR}$ des Vierecks PQRS parallel. Damit handelt es sich bei dem Viereck PQRS um ein Trapez.

Flächeninhalt des Trapezes PQRS:

1. Für die Berechnung des Flächeninhalts des Trapezes benötigt man die Längen der beiden parallelen Seiten $\overline{QR}$ und $\overline{PS}$ sowie die Länge der Höhe des Trapezes, die in der Lösungsgrafik als gestrichelte Strecke $\overline{PH_3}$ eingezeichnet ist. Die drei benötigten Streckenlängen können jeweils mithilfe des Satzes des Pythagoras berechnet werden. Dazu wurden neben dem bereits erwähnten Hilfspunkt H_3 auch noch die Hilfspunkte H_1, H_2 und H_4 in der Grafik ergänzt.

2. Berechnung der Strecke $\overline{QR}$:
   Im rechtwinkligen Dreieck QH_1R gilt nach dem Satz des Pythagoras:
   $\overline{QR}^2 = \overline{QH_1}^2 + \overline{H_1R}^2$
   $\overline{QR}^2 = 8^2 + 8^2 \qquad | \sqrt{}$
   $\overline{QR} = \sqrt{64 + 64}$
   $\overline{QR} = 11{,}31$ Längeneinheiten

3. Berechnung der Strecke $\overline{PS}$:
   Im rechtwinkligen Dreieck PSH_2 gilt nach dem Satz des Pythagoras:
   $\overline{PS}^2 = \overline{PH_2}^2 + \overline{H_2S}^2$
   $\overline{PS}^2 = 4^2 + 4^2 \qquad | \sqrt{}$
   $\overline{PS} = \sqrt{16 + 16}$
   $\overline{PS} = 5{,}66$ Längeneinheiten

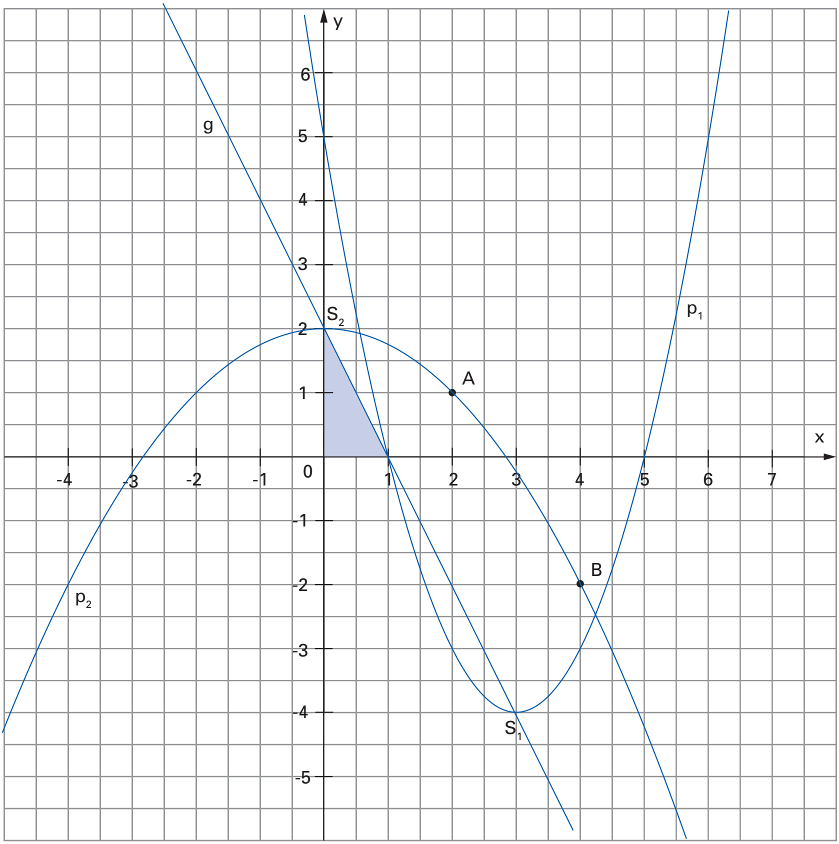
4. Berechnung der Strecke $\overline{PH_3}$:
   Im rechtwinkligen Dreieck PH_4H_3 gilt nach dem Satz des Pythagoras:
   $\overline{PH_3}^2 = \overline{H_3H_4}^2 + \overline{H_4P}^2$
   $\overline{PH_3}^2 = 3^2 + 3^2 \qquad | \sqrt{}$
   $\overline{PH_3} = \sqrt{9 + 9}$
   $\overline{PH_3} = 4{,}24$ Längeneinheiten

5. Berechnung des Flächeninhalts des Trapezes PQRS:
   $A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h_T$
   $A = \frac{1}{2} \cdot (\overline{QR} + \overline{PS}) \cdot \overline{PH_3}$
   $A = \frac{1}{2} \cdot (11{,}31 + 5{,}66) \cdot 4{,}24$
   $A \approx 36$ FE

Der Flächeninhalt des Trapezes beträgt etwa 36 Flächeneinheiten.

Aufgabe 3

a)



Maßstab verkleinert

Bestimmung der Funktionsgleichung für p_1 (andere Lösungswege sind möglich):
Da die beiden Schnittpunkte mit der x-Achse gegeben sind, kann die Funktionsgleichung von p_1 mithilfe der Linearfaktorzerlegung $y = (x - 1)(x - 5)$ angegeben werden.

Umformung in Normalform:

$y = (x - 1)(x - 5)$ I ausmultiplizieren

$y = x^2 - 5x - x + 5$ I zusammenfassen

$y = x^2 - 6x + 5$

Umformung in Scheitelform mithilfe der quadratischen Ergänzung:

$y = x^2 - 6x + 5$

$y = x^2 - 6x + (-3)^2 + 5 - (-3)^2$

$y = (x - 3)^2 + 5 - 9$

$y = (x - 3)^2 - 4$

Der Scheitelpunkt von p_1 ist S_1 (3 I -4).

Bestimmung der Funktionsgleichung für p_2:
Da die y-Achse Symmetrieachse ist, gilt als Ansatz für p_2: $y = ax^2 + c$
Punktproben mit den beiden gegebenen Punkten A und B ergeben:
I: $1 = a \cdot 2^2 + c$
II: $-2 = a \cdot 4^2 + c$
Vereinfachen der beiden Gleichungen I und II ergibt:
I: $4a + c = 1$
II: $16a + c = -2$
Multiplikation von Gleichung I mit (-1) ergibt:
Ia: $-4a - c = -1$
II: $16a + c = -2$
Die Anwendung des Additionsverfahrens (Ia + II) ergibt:
$12a = -3 \quad | : 12$
$a = -0{,}25$
Einsetzen von a = -0,25, z. B. in Gleichung I, ergibt:
$4 \cdot (-0{,}25) + c = 1$
$-1 + c = 1 \quad | + 1$
$c = 2$
Damit gilt: p_2: $y = -0{,}25x^2 + 2$. Die Parabel p_2 hat den Scheitelpunkt S_2 (0 I 2).

Bestimmung der Gleichung der Geraden g mithilfe der Punkte S_1 (3 I -4) und S_2 (0 I 2) und dem Ansatz für g: $y = mx + c$:

1. $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - (-4)}{0 - 3} = \frac{6}{-3} = -2$

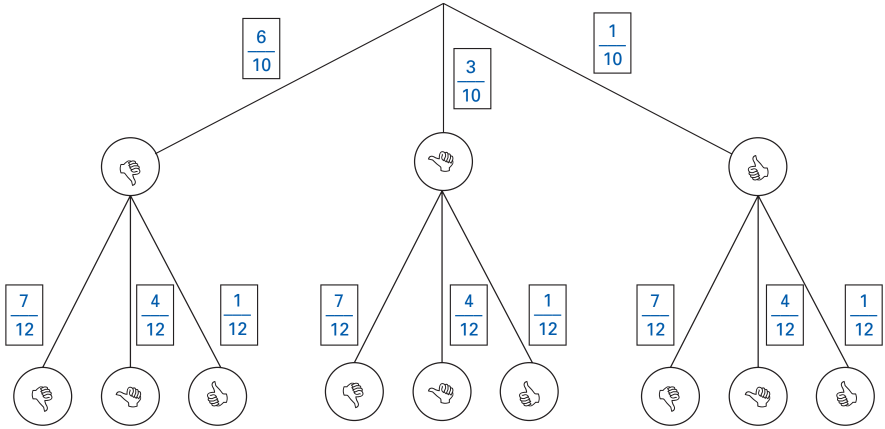
Damit gilt zunächst: g: $y = -2x + c$

2. Punktprobe, z. B. mit S_1, ergibt:
   $-4 = -2 \cdot 3 + c$
   $-4 = -6 + c \quad | +6$
   $c = 2$

Damit gilt: g: $y = -2x + 2$

Berechnung des Inhalts der Fläche, die g mit den Koordinatenachsen einschließt:
Die Fläche ist ein rechtwinkliges Dreieck, daher gilt:
$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g$
$A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$
$A = 1$ FE
Der Inhalt der eingeschlossenen Fläche beträgt eine Flächeneinheit.

b)



Berechnung der Wahrscheinlichkeit der Ereignisse:

P(„Einmal und einmal ") $= \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{12} + \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{12} = \frac{45}{120}$

P(„Einmal und einmal ") $= \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{12} = \frac{7}{120}$

P(„Zweimal ") $= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{120}$

Berechnung des Erwartungswertes:

$E = \frac{45}{120} \cdot 3 + \frac{7}{120} \cdot 5 + \frac{1}{120} \cdot 40 - 2{,}50 = \frac{135}{120} + \frac{35}{120} + \frac{40}{120} - \frac{300}{120} = -\frac{90}{120} = -0{,}75$

Der (negative) Erwartungswert von -0,75 € bedeutet, dass die Betreiberin im Durchschnitt pro Spiel einen Reingewinn von 0,75 € erzielt.

Berechnung des zu verändernden Gewinns für das Ereignis „Einmal und einmal ", um das Spiel fair zu gestalten:

Der Gewinn für das Ereignis „Einmal und einmal " wird mit x bezeichnet. Damit das Spiel fair ist, muss der Erwartungswert 0 sein. Das heißt, es muss dann folgende Gleichung gelten:

$$
\begin{aligned}
\frac{45}{120} \cdot 3 + \frac{7}{120} \cdot x + \frac{1}{120} \cdot 40 - 2{,}5 &= 0 && \mid \cdot 120 \\
135 + 7x + 40 - 300 &= 0 && \mid \text{zusammenfassen} \\
7x - 125 &= 0 && \mid +125 \\
7x &= 125 && \mid :7 \\
x &= 17{,}86
\end{aligned}
$$

Damit das Spiel fair ist, müsste der Gewinn für das Ereignis „Einmal und einmal " 17,86 € betragen.