

Abschluss2023

Realschule Baden-Württemberg



Lösungen Mathematik Muster V

Mathematik

Teil A1

Aufgabe 1

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{125} \\ &= \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{25 \cdot 5} \\ &= \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{5} \\ &= \sqrt{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{5} \\ &= 15 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \\ &= 15\sqrt{10} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Das erste Muster besteht aus 4 gleich großen Teilrechtecken. Von jedem Muster zum nächsten werden alle gleich großen Teilrechtecke in zwei noch kleinere, aber wiederum gleich große Teilrechtecke zerlegt. Dadurch verdoppelt sich von jedem Muster zum nächsten die Anzahl an gleich großen Teilrechtecken. Also gibt es für die Gesamtzahl an gleich großen Teilrechtecken folgende Gesetzmäßigkeit:

$$\text{Muster (1): } 4 \cdot 1 = 4 \cdot 2^0 = 4$$

$$\text{Muster (2): } 4 \cdot 2 = 4 \cdot 2^1 = 8$$

$$\text{Muster (3): } 8 \cdot 2 = (4 \cdot 2) \cdot 2 = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 2^2 = 16$$

Also gilt auch:

$$\text{Muster (4): } 16 \cdot 2 = (4 \cdot 2^2) \cdot 2 = 4 \cdot 2^2 \cdot 2 = 4 \cdot 2^3 = 32$$

$$\text{Daraus folgt für Muster (7): } 4 \cdot 2^6 = 4 \cdot 64 = 256$$

Das 7. Muster besteht aus 256 gleich großen Teilrechtecken.

Aufgabe 3

Bestimmung der Wassermenge (in cm^3) in der Pyramide:

$$V_{\text{Py}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V_{\text{Py}} = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 6$$

$$V_{\text{Py}} = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 6$$

$$V_{\text{Py}} = 2 \cdot 144$$

$$V_{\text{Py}} = 288 \text{ cm}^3$$

Das Volumen der Wassermenge (und damit auch das Gesamtvolumen der Pyramide) beträgt 288 cm^3 .

Berechnung der Kantenlänge der quadratischen Grundfläche eines der drei gleich großen Quader:

1. Die Gesamtmenge an Wasser beträgt 288 cm^3 . Deshalb enthält jeder der drei Quader $288 \text{ cm}^3 : 3 = 96 \text{ cm}^3$.
2. Jeder Quader soll zusätzlich zur eingefüllten Wassermenge (96 cm^3) noch 32 cm^3 „Luft“ enthalten. Damit hat jeder der drei Quader ein Gesamtvolumen von $96 \text{ cm}^3 + 32 \text{ cm}^3 = 128 \text{ cm}^3$.

3. Mit k als Variable für die gesuchte Kantenlänge eines 8 cm hohen Quaders gilt:

$$\begin{aligned} V_{\text{Quader}} &= k^2 \cdot h \\ 128 &= k^2 \cdot 8 && | : 8 \\ k^2 &= 16 && | \sqrt{} \\ k &= 4 \text{ cm} \end{aligned}$$

Die Kantenlänge der quadratischen Grundfläche beträgt bei allen drei Quadern 4 cm.

Aufgabe 4

Gemäß der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit („im zweiten Zug“) wird offenbar ein zweites Mal gezogen, also muss laut Spielregel im ersten Zug eine Kugel mit der Aufschrift „Try again“ gezogen worden sein.

Wenn die verdeckte Kugel die Aufschrift „Winner“ trüge, dann würde gelten:

$$P(\text{„Winner“ im zweiten Zug}) = \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{42} = \frac{1}{14}$$

Dies stimmt aber nicht mit der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit überein.

Wenn die verdeckte Kugel die Aufschrift „Loser“ trüge, dann würde gelten:

$$P(\text{„Winner“ im zweiten Zug}) = \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{42} = \frac{1}{21}$$

Dies stimmt aber nicht mit der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit überein.

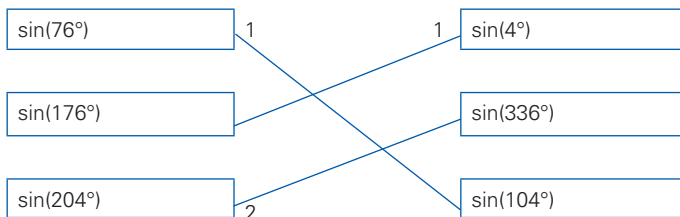
Wenn die verdeckte Kugel die Aufschrift „Try again“ trüge, dann würde gelten:

$$P(\text{„Winner“ im zweiten Zug}) = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{42} = \frac{2}{21}$$

Dies stimmt mit der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit überein.

Dies bedeutet, dass die verdeckte Kugel die Aufschrift „Try again“ trägt.

Aufgabe 5

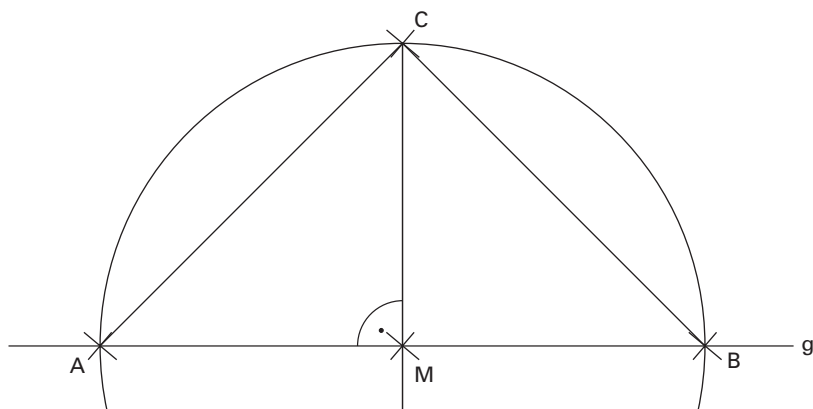


$$\sin(76^\circ) = \sin(104^\circ) > 0$$

$$\sin(176^\circ) = \sin(4^\circ) > 0$$

$$\sin(204^\circ) = \sin(336^\circ) < 0$$

Aufgabe 6



Konstruktionsschritte:

1. Lot von C auf g fällen; Schnittpunkt von Lot und g mit M bezeichnen
2. Kreisbogen (Thaleskreis) um M mit Radius $\overline{MC}$ schlagen; Schnittpunkte von Kreis und g mit A und B bezeichnen
3. A, B und C miteinander verbinden

Aufgabe 7

1. Die Parabel p_2 geht aus p_1 durch eine **Verschiebung um 3 Einheiten nach oben** hervor.
2. Die Parabel p_3 geht aus p_2 durch eine **Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{4}$** hervor.
3. Die Parabel p_4 geht aus p_3 durch eine **Spiegelung an der x-Achse** hervor.

Bestimmung der Parabelgleichungen für p_2 , p_3 und p_4 :

$$p_2: y = 2x^2$$

$$p_3: y = 0,5x^2$$

$$p_4: y = -0,5x^2$$

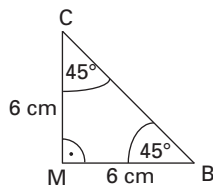
Teil A2

Aufgabe 1

$$\begin{aligned}\sin(30^\circ) &= \frac{6 \text{ cm}}{\overline{AB}} \\ \overline{AB} &= \frac{6 \text{ cm}}{\sin(30^\circ)} \\ \overline{AB} &= 12 \text{ cm}\end{aligned}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{GK}}{\text{Hy}}$$

- $\triangle MBC$ ist gleichschenkelig-rechtwinklig.
 $\Rightarrow MC = 6 \text{ cm}$



Berechnung von $\overline{AM}$ mit dem Satz des Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\begin{aligned}\overline{AM}^2 + \overline{MB}^2 &= \overline{AB}^2 && | - \overline{MB}^2 \\ \overline{AM}^2 &= \overline{AB}^2 - \overline{MB}^2 \\ \overline{AM}^2 &= (12 \text{ cm})^2 - (6 \text{ cm})^2 && | \sqrt{} \\ \overline{AM} &= 10,39 \text{ cm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \overline{AC} &= \overline{AM} + \overline{MC} \\ \overline{AC} &= 10,39 \text{ cm} + 6 \text{ cm} \\ \overline{AC} &= 16,39 \text{ cm}\end{aligned}$$

- Flächeninhalt im Drachenviereck:

$$A = \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2} \cdot 16,39 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm} \\ A &= 98,34 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Berechnung des Volumens des Abfalls:

$$d = 2r = 8 \text{ cm} \Rightarrow r = 4 \text{ cm}$$

1. Volumen des Zylinders:

$$V_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot 4^2 \cdot 10$$

$$V_{\text{Zylinder}} = 502,65 \text{ cm}^3$$

2. Volumen des Doppelkegels:

$$2 \cdot V_{\text{Kegel}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$2 \cdot V_{\text{Kegel}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 5$$

$$2 \cdot V_{\text{Kegel}} = 167,55 \text{ cm}^3$$

3. Volumen des Abfalls:

$$V_{\text{Abfall}} = V_{\text{Zylinder}} - 2 \cdot V_{\text{Kegel}}$$

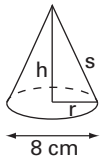
$$V_{\text{Abfall}} = 502,65 - 167,55$$

$$V_{\text{Abfall}} = 335,1 \text{ cm}^3$$

Das Volumen des Abfalls beträgt 335,1 cm³.

Berechnung des Oberflächeninhalts des Doppelkegels:

1. Seitenkante s eines Kegels:



Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$r^2 + h^2 = s^2$$

$$4^2 + 5^2 = s^2$$

$$s^2 = 16 + 25$$

$$s^2 = 41$$

$$| \sqrt{\quad}$$

$$s = 6,4 \text{ cm}$$

2. Oberflächeninhalt des Doppelkegels:

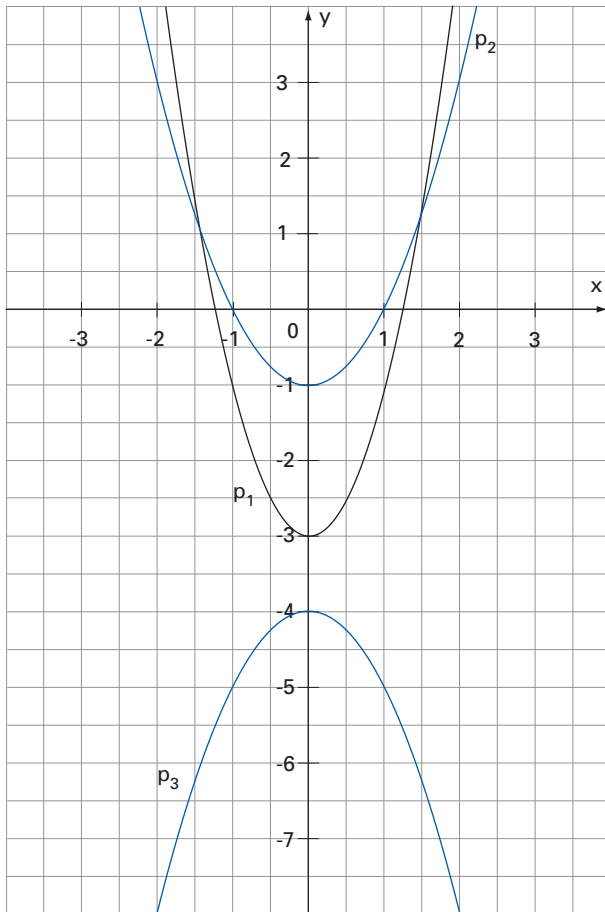
$$2 \cdot O_{\text{Kegel}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + s)$$

$$2 \cdot O_{\text{Kegel}} = 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot (4 + 6,4)$$

$$2 \cdot O_{\text{Kegel}} = 261,4 \text{ cm}^2$$

Der Oberflächeninhalt des Doppelkegels beträgt etwa 251,4 cm².

Aufgabe 3



Beschreibung der Parabeln p_1 , p_2 und p_3 :

Die Parabel p_1 ist nach oben geöffnet und schmäler als die Normalparabel. Ihr Scheitelpunkt liegt unterhalb der x-Achse.

Die Parabel p_2 ist nach oben geöffnet und hat dieselbe Form wie die Normalparabel. Ihr Scheitelpunkt liegt unterhalb der x-Achse.

Die Parabel p_3 ist nach unten geöffnet und hat dieselbe Form wie die Normalparabel. Ihr Scheitelpunkt liegt unterhalb der x-Achse.

Berechnung der Schnittpunkte von p_1 und p_2 :

Gleichsetzen der beiden Parabelgleichungen ergibt:

$$\begin{array}{ll} 2x^2 - 3 = x^2 - 1 & | -x^2 \\ x^2 - 3 = -1 & | +3 \\ x^2 = 2 & | \sqrt{} \\ x_1 = \sqrt{2} = 1,41; & x_2 = -\sqrt{2} = -1,41 \end{array}$$

Einsetzen der beiden gefundenen Lösungen x_1 und x_2 , z. B. in die Gleichung von p_2 , ergibt:

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{2}^2 - 1 = 2 - 1 = 1 \\ y_2 &= (-\sqrt{2})^2 - 1 = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

Damit gilt für die beiden Schnittpunkte: A ($\sqrt{2}$ | 1) und B ($-\sqrt{2}$ | 1)

(Oder in gerundeter Dezimalschreibweise: A (1,41 | 1) und B (-1,41 | 1))

Aufgabe 4

Berechnung des Zinssatzes:

$$K_0 = 120\,000 \text{ €}; K_3 = 124\,003,72 \text{ €}; n = 3; \text{ gesucht: } p; q = \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Folglich gilt mit der Zinseszinsformel:

$$\begin{aligned} K_3 &= 120\,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 \\ 124\,003,72 &= 120\,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 && | : 120\,000 \\ 1,0334 &= \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 && | \sqrt[3]{} \\ \sqrt[3]{1,0334} &= 1 + \frac{p}{100} && | - 1 \\ \sqrt[3]{1,0334} - 1 &= \frac{p}{100} && | \cdot 100 \\ p &= 1,1\% \end{aligned}$$

Der Zinssatz der Geldanlage beträgt 1,1%.

Bestimmung der Anzahl an Jahren, nach denen das Guthaben erstmals 130 000 € übersteigt:

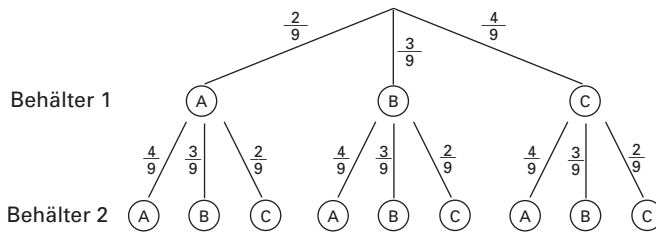
$$\begin{aligned} K_0 &= 120\,000 \text{ €}; n \text{ ist gesucht}; p = 1,1\% \text{ (siehe obige Lösung)}; q = 1 + \frac{1,1}{100} = 1,011 \\ K_n &= 120\,000 \cdot 1,011^n \end{aligned}$$

Systematisches Probieren mit dem Taschenrechner ergibt z. B.:

$$\begin{aligned} n = 9: & \quad K_9 = 120\,000 \cdot 1,011^9 = 132\,416,36 \\ n = 7: & \quad K_7 = 120\,000 \cdot 1,011^7 = 129\,550,57 \\ n = 8: & \quad K_8 = 120\,000 \cdot 1,011^8 = 130\,975,63 \end{aligned}$$

Das Guthaben übersteigt erstmals nach 8 Jahren den Betrag von 130 000 €.

Aufgabe 5



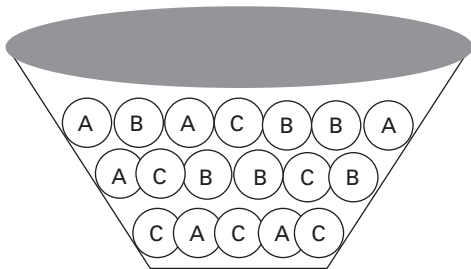
Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass jeweils der gleiche Buchstabe aus Behälter 1 und Behälter 2 gezogen wird:

$P(\text{„Gleicher Buchstabe aus Behälter 1 und Behälter 2“})$

$$= P(A; A) + P(B; B) + P(C; C) = \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{9} \cdot \frac{3}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{9} = \frac{25}{81} = 30,9\%$$

Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass die beiden aus Behälter 3 gezogenen Kugeln unterschiedliche Buchstaben haben:

Behälter 3



In diesem Fall werden die beiden Kugeln gleichzeitig aus einem einzigen Behälter gezogen.

Dies bedeutet, dass es sich um Ziehen ohne Zurücklegen handelt. Behälter 3 enthält zu Beginn 6 Kugeln mit dem Buchstaben A, 6 Kugeln mit dem Buchstaben B und 6 Kugeln mit dem Buchstaben C.

$P(\text{„Zwei Kugeln mit unterschiedlichen Buchstaben aus Behälter 3“})$

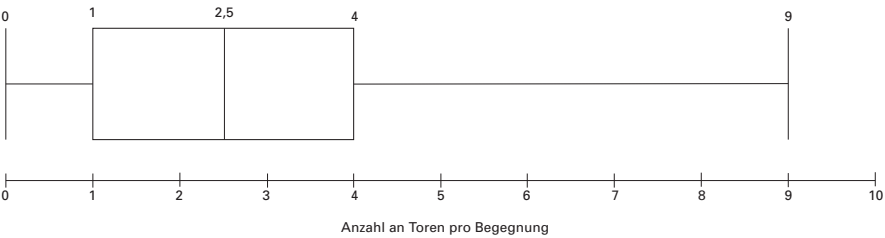
$= 1 - P(\text{„Zwei Kugeln mit gleichen Buchstaben aus Behälter 3“})$

$= 1 - (P(A; A) + P(B; B) + P(C; C))$

$$= 1 - \left(\frac{6}{18} \cdot \frac{5}{17} + \frac{6}{18} \cdot \frac{5}{17} + \frac{6}{18} \cdot \frac{5}{17} \right) = 1 - \frac{90}{306} = \frac{216}{306} = 70,6\%$$

Aufgabe 6

Boxplot zu den ersten beiden Spieltagen:
Minimum: 0
Unteres Quartil q_u : 1
Zentralwert (Median): 2,5
Oberes Quartil q_o : 4
Maximum: 9



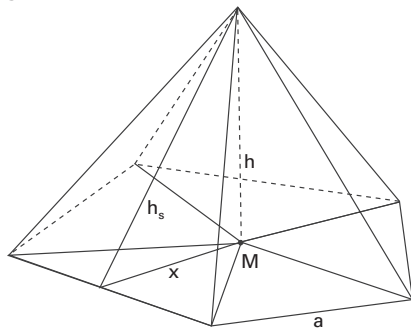
Aussagen zum Boxplot über die Spieltage 3 und 4:

	Wahr	Falsch	Nicht entscheidbar
An dem Boxplot kann man nicht ablesen, ob es unter den 18 Begegnungen auch torlose (also mit dem Endstand 0:0) gab.		x	
Im Durchschnitt wurden in den 18 Begegnungen vier Tore erzielt.			x
In 6 der 18 Begegnungen wurde die maximale Anzahl an Toren erzielt.		x	
In mindestens einem Viertel der 18 Begegnungen wurden entweder 5 oder 6 Tore erzielt.	x		

Teil B

Aufgabe 1

a)



Mantel einer regelmäßigen fünfseitigen Pyramide:

$$M = 5 \cdot \frac{a \cdot h_s}{2}$$

Berechnung von a:

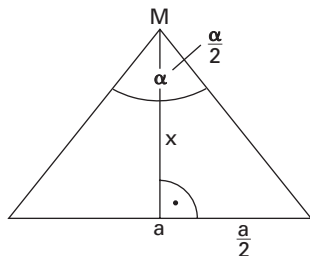
$$160 \text{ cm}^2 = 5 \cdot \frac{a \cdot 10,2 \text{ cm}}{2}$$

$$160 \text{ cm}^2 = 25,5 \text{ cm} \cdot a$$

$$a = 6,27 \text{ cm}$$

$$l : 25,5 \text{ cm}$$

Bodendreieck:



$$\text{Es gilt: } \alpha = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

Berechnung von x:

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a}{x}$$

$$\tan(36^\circ) = \frac{3,14 \text{ cm}}{x}$$

$$| : x \quad | : \tan(36^\circ)$$

$$x = \frac{3,14 \text{ cm}}{\tan(36^\circ)}$$

$$x = 4,32 \text{ cm}$$

Flächeninhalt Dreieck:

$$A_{\Delta} = \frac{\text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}}{2}$$

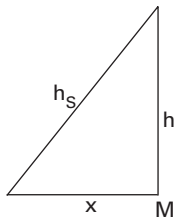
Also Flächeninhalt des Bodendreiecks:

$$A = \frac{a \cdot x}{2} = \frac{6,27 \text{ cm} \cdot 4,32 \text{ cm}}{2} = 13,54 \text{ cm}^2$$

Volumen einer regelmäßigen fünfseitigen Pyramide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Berechnung von h:



nach Pythagoras

$$h^2 + x^2 = h_s^2 \quad | - x^2$$

$$h^2 = h_s^2 - x^2$$

$$h^2 = (10,2 \text{ cm})^2 - (4,32 \text{ cm})^2 = 85,38 \text{ cm}^2$$

$$h = 9,24 \text{ cm}$$

Berechnung von G:

$$\begin{aligned} G &= 5 \cdot (\text{Flächeninhalt des Bodendreiecks}) \\ &= 5 \cdot 13,54 \text{ cm}^2 \\ &= 67,7 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Berechnung des Volumens V:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot 67,7 \text{ cm}^2 \cdot 9,24 \text{ cm} \\ V &= 208,52 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Das Volumen der regelmäßigen fünfseitigen Pyramide beträgt $208,52 \text{ cm}^3$.

b) Bestimmung der zum ursprünglichen Kanal gehörenden Parabelgleichung:

1. Wenn man z. B. die Uferlinie als x-Achse verwendet und die y-Achse senkrecht zur x-Achse durch den tiefsten Punkt der Parabel (= Scheitelpunkt) legt, dann gilt als Ansatz für die Parabelgleichung: $y = ax^2 - 7,5$

2. Da der Kanal 25 m breit ist, kann man die beiden Schnittpunkte der zugehörigen Parabel mit der x-Achse als A (-12,5 | 0) und B (12,5 | 0) angeben. Folglich ergibt eine Punktprobe, z. B. mit B:

$$\begin{aligned} a \cdot 12,5^2 - 7,5 &= 0 \\ 156,25a - 7,5 &= 0 && | + 7,5 \\ 156,25a &= 7,5 && | : 156,25 \\ a &= 0,048 \end{aligned}$$

Damit gilt für die zum ursprünglichen Kanal gehörende Parabelgleichung: $y = 0,048x^2 - 7,5$

Bestimmung der Breite des verbreiterten Kanals:

- Da die tiefste Stelle des Kanals nicht verändert wird, gilt $c = -7,5$. Damit lautet die zum verbreiterten Kanal gehörende Parabelgleichung: $y = 0,03x^2 - 7,5$
- Um die Breite des verbreiterten Kanals zu berechnen, muss man die Schnittpunkte der zugehörigen Parabel mit der x-Achse (= Nullstellen) berechnen:

$$\begin{aligned} 0,03x^2 - 7,5 &= 0 && | + 7,5 \\ 0,03x^2 &= 7,5 && | : 0,03 \\ x^2 &= 250 && | \sqrt{} \\ x_1 &= -15,8; \quad x_2 = 15,8 \end{aligned}$$
- Die Maßzahl der Kanalbreite ist doppelt so groß wie die positive Schnittstelle der Parabel mit der x-Achse:

$$2 \cdot 15,8 = 31,6$$

Der verbreiterte Kanal ist etwa 31,6 m breit.

Aufgabe 2

- a) Berechnung des Kugelvolumens:

$$V_K = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$V_K = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3$$

$$V_K = 904,78 \text{ cm}^3$$

Berechnung des prozentualen Anteils des leer bleibenden Raumes an dem Gesamtvolumen des Zylinders:

- Berechnung des Zylindervolumens:

Die Höhe des Zylinders ist doppelt so groß wie der Radius des Zylinders bzw. der Kugel, d. h. es gilt: $h = 2r$

$$V_Z = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V_Z = \pi \cdot r^2 \cdot 2r$$

$$V_Z = \pi \cdot 6^2 \cdot 2 \cdot 6$$

$$V_Z = 1357,17 \text{ cm}^3$$

2. Berechnung des prozentualen Anteils des leer bleibenden Raumes an dem Gesamtvolumen des Zylinders:

Das Volumen des leer bleibenden Raumes V_{leer} berechnet sich wie folgt:

$$V_{\text{leer}} = V_Z - V_K$$

$$V_{\text{leer}} = 1357,17 - 904,78$$

$$V_{\text{leer}} = 452,39 \text{ cm}^3$$

$$W = G \cdot \frac{p}{100}$$

$$452,39 = 1357,17 \cdot \frac{p}{100} \quad | : 1357,17 \quad | \cdot 100$$

$$p = 33,3\%$$

Berechnung des Inhalts der Gesamtfläche A, die lackiert werden muss:

1. Oberflächeninhalt der Kugel:

$$O_K = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$O_K = 4 \cdot \pi \cdot 6^2$$

$$O_K = 452,39 \text{ cm}^2$$

2. Oberflächeninhalt des Zylinders:

$$O_Z = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + h)$$

$$O_Z = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + 2r)$$

$$O_Z = 2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot (6 + 12)$$

$$O_Z = 678,58 \text{ cm}^2$$

3. Gesamtfläche A:

$$A = O_K + O_Z$$

$$A = 452,39 + 678,58$$

$$A = 1130,97 \text{ cm}^2$$

Der Flächeninhalt der Gesamtfläche, die lackiert werden muss, beträgt etwa 1131 cm^2 .

b) Schnittpunkte N_1 und N_2 sowie Scheitel S_1 :

1. Schnittpunkte N_1 und N_2 :

$$x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{65}{16} = 0$$

| Lösungsformel

$$x_{1,2} = -\frac{-\frac{9}{2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-\frac{9}{2}}{2}\right)^2 - \frac{65}{16}}$$

$$x_{1,2} = \frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{81}{16} - \frac{65}{16}}$$

$$x_{1,2} = \frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{16}{16}}$$

$$x_{1,2} = \frac{9}{4} \pm 1$$

$$x_1 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} = 1,25$$

$$x_2 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4} = 3,25$$

Damit gilt für die Schnittpunkte N_1 und N_2 : $N_1 (1,25 | 0)$ und $N_2 (3,25 | 0)$

2. Scheitel S_1 :

Aus Symmetriegründen liegt die x-Koordinate x_S des Scheitels S_1 genau in der Mitte der beiden x-Koordinaten von N_1 und N_2 , also gilt:

$$x_S = (1,25 + 3,25) : 2 = 4,5 : 2 = 2,25$$

Daher gilt für die Gleichung von p_1 in Scheitelform:

$$y = (x - 2,25)^2 + e$$

Einsetzen, z. B. des Punktes $N_1 (1,25 | 0)$, ergibt:

$$(1,25 - 2,25)^2 + e = 0$$

$$(-1)^2 + e = 0$$

$$1 + e = 0$$

| -1

$$e = -1$$

Damit hat p_1 die Funktionsgleichung $y = (x - 2,25)^2 - 1$ und den Scheitel $S_1 (2,25 | -1)$.

Gerade g:

1. In der allgemeinen Form der Geradengleichung $y = mx + c$ müssen die Steigung m und der y-Achsenabschnitt c bestimmt werden.

Berechnung der Steigung m mit den Punkten N_2 und S_1 :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - 0}{2,25 - 3,25} = \frac{-1}{-1} = 1$$

Damit gilt für g: $y = x + c$

2. Berechnung des y-Achsenabschnitts c :

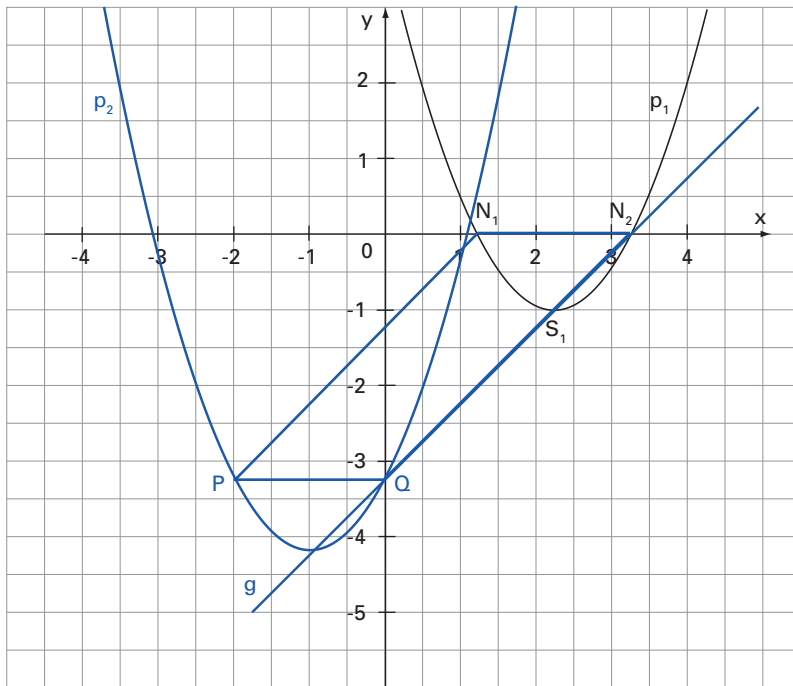
Setzt man in die Gleichung $y = x + c$ die Koordinaten (z. B.) des Punktes $N_2 (3,25 | 0)$ ein, dann ergibt sich:

$$3,25 + c = 0$$

| - 3,25

$$c = -3,25$$

Damit lautet die Gleichung der Geraden g: $y = x - 3,25$



Koordinaten von Q, Parallelogramm PQN_2N_1 und dessen Flächeninhalt:

- Punkt Q:
Q kann aus dem y-Achsenabschnitt von g abgelesen werden: Q (0 | -3,25)
- Punkt P:
Da in einem Parallelogramm die gegenüberliegenden Seiten gleich lang sind, muss gelten:
 $\overline{PQ} = \overline{N_1N_2}$
 $\overline{PQ} = 3,25 - 1,25 = 2$
Da $\overline{PQ}$ außerdem wegen des Parallelogramms parallel zu $\overline{N_1N_2}$ liegen muss, gilt:
P (-2 | -3,25)
- Flächeninhalt des Parallelogramms PQN_2N_1 :
 $A = g \cdot h_g$
 $A = \overline{PQ} \cdot h_g$
 $A = 2 \cdot h_g$
Da h_g der Länge des y-Achsenabschnitts von g entspricht, gilt:
 $A = 2 \cdot 3,25$
 $A = 6,5$ Flächeneinheiten
Der Flächeninhalt des Parallelogramms beträgt 6,5 Flächeneinheiten.

Funktionsgleichung der Parabel p_2 in Scheitelform:

- Da P und Q dieselbe y-Koordinate haben, liegt die x-Koordinate x_S des Scheitels S_2 aus Symmetriegründen genau in der Mitte der beiden x-Koordinaten von P und Q, also gilt:

$$x_S = (-2 + 0) : 2 = -1$$

Daher gilt für die Gleichung von p_2 in Scheitelform: $y = (x + 1)^2 + e$

- Einsetzen, z. B. des Punktes Q (0 | -3,25), ergibt:

$$(0 + 1)^2 + e = -3,25$$

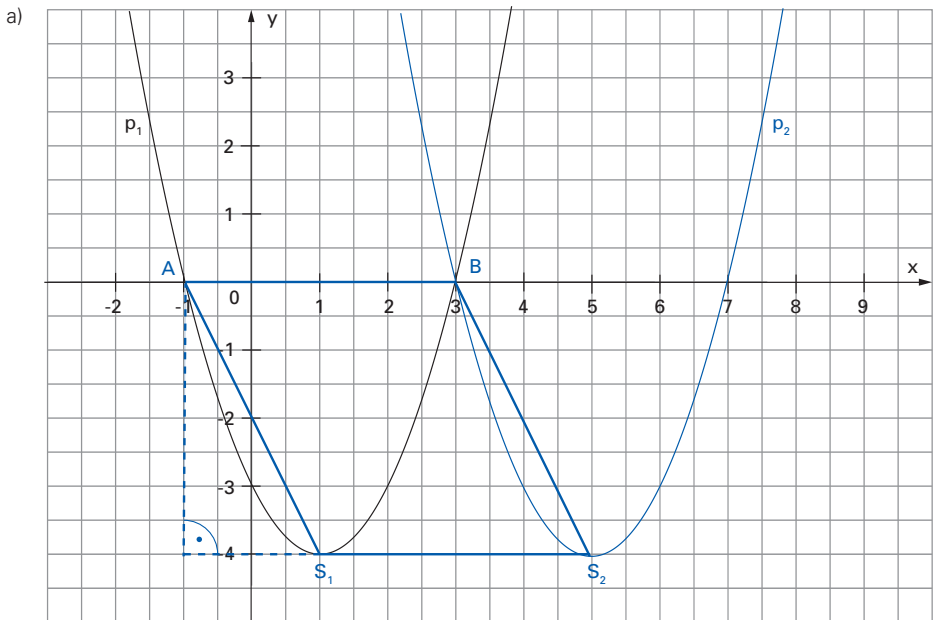
$$1 + e = -3,25$$

$$| -1$$

$$e = -4,25$$

Damit hat p_2 die Funktionsgleichung $y = (x + 1)^2 - 4,25$.

Aufgabe 3



Maßstab verkleinert

Bestimmung der Funktionsgleichung für p_1 :

Der Scheitelpunkt von p_1 kann mit $S_1(1 | -4)$ aus der Grafik abgelesen werden.

Damit gilt für die Gleichung von p_1 : $y = (x - 1)^2 - 4$

Ablesen und rechnerische Überprüfung der Koordinaten der Schnittpunkte A und B von p_1 mit der x-Achse

Abgelesen: A (-1 | 0) und B (3 | 0)

Rechnerische Überprüfung:

I. Möglichkeit

Einsetzen der x-Koordinaten von A und B in die Gleichung von p_1 :

$$A (-1 | 0): y = (-1 - 1)^2 - 4 = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

$$B (3 | 0): y = (3 - 1)^2 - 4 = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

Da in beiden Fällen die y-Koordinate 0 ergibt, liegen A und B auf p_1 und sind somit die Schnittpunkte von p_1 mit der x-Achse.

II. Möglichkeit

Aufstellen und Lösen der entsprechenden quadratischen Gleichung:

$$(x - 1)^2 - 4 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 - 4 = 0 \quad | \text{zusammenfassen}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad | \text{Lösungsformel}$$

$$x_{1,2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - (-3)}$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 3}$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{4}$$

$$x_{1,2} = 1 \pm 2$$

$$x_1 = 1 - 2 = -1; \quad x_2 = 1 + 2 = 3$$

Damit gilt für die Schnittpunkte von p_1 mit der x-Achse: A (-1 | 0) und B (3 | 0)

Bestimmung der Funktionsgleichung für p_2 :

Wenn die Parabel p_1 um 4 Einheiten nach rechts verschoben wird, wird auch der Scheitelpunkt um 4 Einheiten nach rechts verschoben. Dementsprechend hat Parabel p_2 einen Scheitelpunkt S_2 , dessen x-Koordinate um 4 größer ist als bei S_1 , während die y-Koordinate unverändert bleibt. Folglich gilt für die Parabel p_2 :

$$S_2 (5 | -4) \text{ und somit } p_2: y = (x - 5)^2 - 4$$

Bestimmung der besonderen Art sowie des Umfangs des Vierecks AS_1S_2B :

1. Art des Vierecks begründen: _____

Die beiden Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{S_1S_2}$ sind offensichtlich parallel und gleich lang. Die beiden Strecken $\overline{AS_1}$ und $\overline{S_2B}$ sind ebenfalls parallel und gleich lang. Dies kann z. B. dadurch begründet werden, dass man in beiden Fällen jeweils 4 Einheiten nach unten und 2 Einheiten nach rechts gehen muss, um von A zu S_1 bzw. von B zu S_2 zu gelangen. Damit hat das Viereck zwei Paare paralleler und gleich langer Seiten. Es handelt sich also um ein Parallelogramm.

2. Berechnung des Umfangs des Parallelogramms:

Für die Seitenlängen $\overline{AB}$ und $\overline{S_1S_2}$ gilt offensichtlich: $\overline{AB} = \overline{S_1S_2} = 4 \text{ LE}$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt für die Seitenlänge $\overline{AS_1}$ (siehe Grafik):

$$\overline{AS_1}^2 = 4^2 + 2^2$$

$$\overline{AS_1}^2 = 16 + 4$$

$$\overline{AS_1}^2 = 20 \quad | \sqrt{}$$

$$\overline{AS_1} = \sqrt{20} \text{ LE} \approx 4,5 \text{ LE}$$

Mit $\overline{AS_1} = \overline{S_2B} \approx 4,5$ LE gilt für den Umfang u des Parallelogramms:

$$u = 2 \cdot \overline{AB} + 2 \cdot \overline{AS_1}$$

$$u \approx 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4,5$$

$$u \approx 8 + 9$$

$$u \approx 17 \text{ LE}$$

Der Umfang des Parallelogramms beträgt etwa 17 Längeneinheiten.

- b) Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für „Pasch“ und „Augensumme ist genau 7“:
Beim gleichzeitigen Würfeln mit zwei Würfeln gibt es insgesamt $6 \cdot 6 = 36$ mögliche Ergebnisse. Die Anzahlen der jeweils „günstigen“ Ergebnisse für die beiden Ereignisse ergeben sich wie folgt:

„Pasch“: (1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (5; 5), (6; 6); es gibt also 6 günstige Ergebnisse.

$$\text{Deshalb gilt: } P(\text{„Pasch“}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

„Augensumme ist genau 7“: (1; 6), (6; 1), (2; 5), (5; 2), (3; 4), (4; 3); es gibt also 6 günstige Ergebnisse.

$$\text{Deshalb gilt: } P(\text{„Augensumme ist genau 7“}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Berechnung des Erwartungswerts:

$$E = \frac{1}{6} \cdot 9 + \frac{1}{6} \cdot 9 - 3,50 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

Der (negative) Erwartungswert von $-0,50$ € bedeutet, dass der/die Betreiber/-in im Durchschnitt pro Spiel einen Reingewinn von $0,50$ € erzielt.

Berechnung der zu verändernden, aber gleich hohen Gewinne für „Pasch“ und „Augensumme ist genau 7“, um das Spiel fair zu gestalten:

Der Gewinn für die beiden Ereignisse wird mit x bezeichnet. Damit das Spiel fair ist, muss der Erwartungswert 0 sein. Das heißt, es muss dann folgende Gleichung gelten:

$$\frac{1}{6} \cdot x + \frac{1}{6} \cdot x - 3,50 = 0$$

$$\frac{2}{6}x - 3,5 = 0 \quad | \cdot 6$$

$$2x - 21 = 0 \quad | + 21$$

$$2x = 21 \quad | : 2$$

$$x = 10,50$$

Damit das Spiel fair ist, müsste der Gewinn für beide Ereignisse jeweils $10,50$ € betragen.