

Abschluss2023

MSA Klasse 10 Nordrhein-Westfalen



Realschule Typ B · Gesamtschule EK · Sekundarschule

Mathematik Originalprüfung 2018

Mathematik

Prüfungsteil 1

Aufgabe 1

a) Ordne der Größe nach. Beginne mit der kleinsten Zahl.

-0,7 $\frac{7}{100}$ $-\frac{1}{7}$ 0,17

b) Miriam behauptet: „65 % sind mehr als $\frac{25}{30}$.“ Hat Miriam recht? Überprüfe die Behauptung durch eine Rechnung.

Aufgabe 2

In einem Beutel befinden sich 8 rote, 2 blaue und 6 grüne Kugeln.

a) Gib die Wahrscheinlichkeit an, eine blaue Kugel zu ziehen.

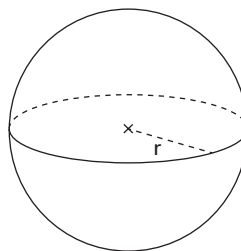
b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Es wird eine rote oder eine grüne Kugel gezogen“.

Aufgabe 3

Eine Kugel hat einen Radius von 6 cm.

a) Berechne die Oberfläche der Kugel.

b) Sina überlegt: „Wenn ich den Radius verdopple, dann verdoppelt sich auch die Oberfläche.“
Hat Sina recht? Begründe deine Entscheidung.



Aufgabe 4

Löse das lineare Gleichungssystem. Notiere deinen Lösungsweg.

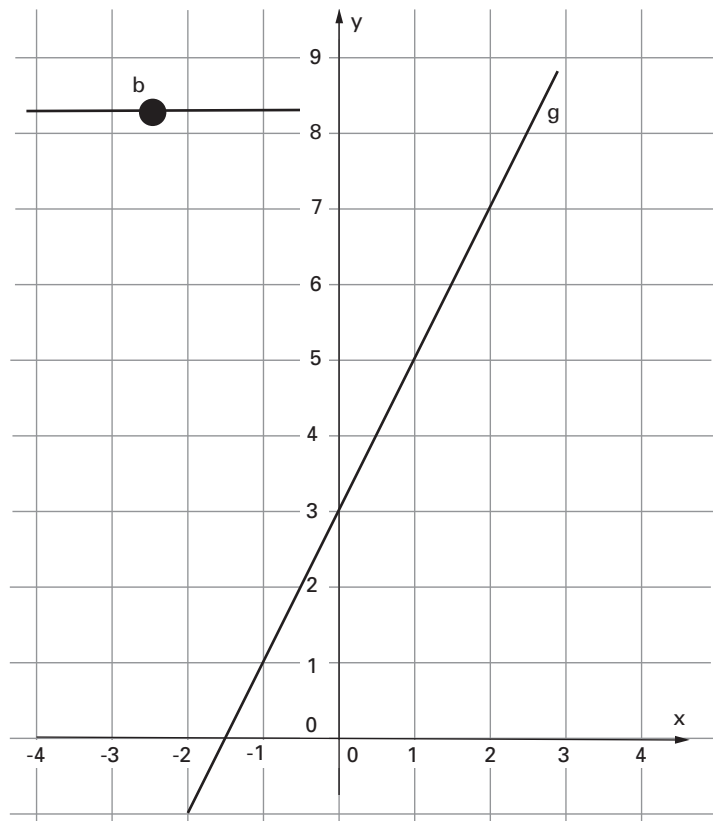
I $3x + 4y = 22$

II $5x - 4y = -6$

Aufgabe 5

Marlon zeichnet mit einer Geometriesoftware den Graphen g der Funktion $g(x) = 2x + b$. Er erstellt einen Schieberegler, mit dem er den Wert für b verändern kann.

- Der Schieberegler zeigt den Wert für b nicht an. Gib den Wert für b an.
- Marlon stellt für b den Wert 5 ein. Zeichne den Graphen in das Koordinatensystem.



Prüfungsteil 2

Aufgabe 1: Fuldataalbrücke

Max und Justus machen einen Ausflug von Frankfurt zur Fuldataalbrücke in Baunatal (Abbildung 1).

Die Freunde gehen zu Fuß zum Bahnhof in Frankfurt. Der Fußweg hat eine Länge von 2,4 km. Sie gehen mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von vier Kilometern pro Stunde [km/h].



Abbildung 1: Fuldataalbrücke
Bild-Quelle: Günther Pöpperl, <http://regiowiki.hna.de/>
Datei: Eisenbahnbruecke_baunatal_guntershausen.jpg
lizenziert unter CC BY-NC-SA 2.0

- Berechne, wie viele Minuten die beiden bis zum Bahnhof benötigen.

Die Freunde fahren mit dem Zug um 8:14 Uhr in Frankfurt los und kommen um 11:13 Uhr in Baunatal an. Der abgebildete Graph stellt vereinfacht den Verlauf ihrer Zugfahrt dar (Abbildung 2).

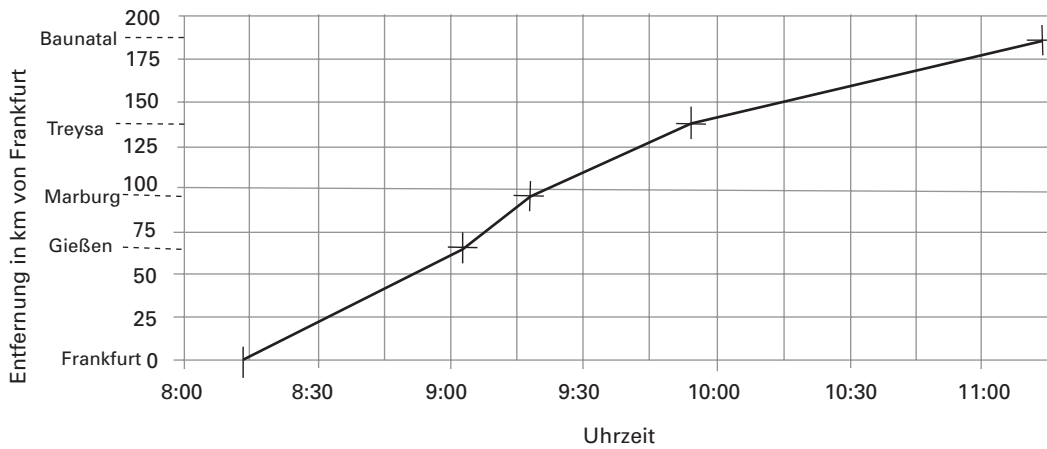


Abbildung 2: Verlauf der Zugfahrt

- b) Auf welcher Teilstrecke fährt der Zug mit der höchsten Durchschnittsgeschwindigkeit? Begründe deine Entscheidung.

Um 8:30 Uhr fährt in Baunatal ein Güterzug nach Frankfurt los. Er fährt die Strecke mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 100 Kilometern pro Stunde [km/h].

- c) Zeichne den Verlauf der Fahrt des Güterzugs in die Grafik ein (Abbildung 2). Entnimm der Grafik den Streckenabschnitt, auf dem sich die beiden Züge begegnen und gib die ungefähre Uhrzeit an.

Der Zug durchfährt Kurven in Schräglage. Um diese Schräglage zu erreichen, werden die Gleise unterschiedlich hoch verlegt (Abbildung 3). Der Neigungswinkel α darf maximal $7,1^\circ$ betragen.

- d) Max behauptet: „Wenn der Neigungswinkel $\alpha = 7,1^\circ$ beträgt, dann beträgt der Höhenunterschied der Gleise $u \approx 17,7$ cm.“

Hat Max recht? Begründe mit einer Rechnung.

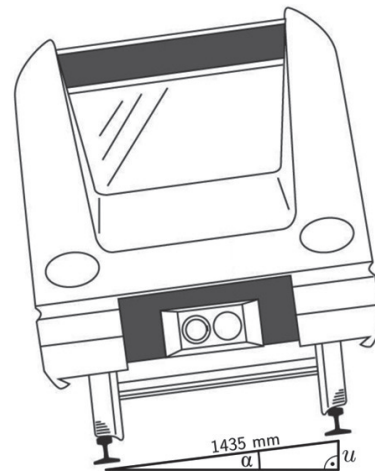


Abbildung 3: Zug in Schräglage

In Baunatal fotografieren Max und Justus die Brücke für den Mathematikunterricht. Der Brückenbogen kann durch eine Parabel g der Form $g(x) = d \cdot (x - e)^2 + f$ angenähert werden (Abbildung 4).

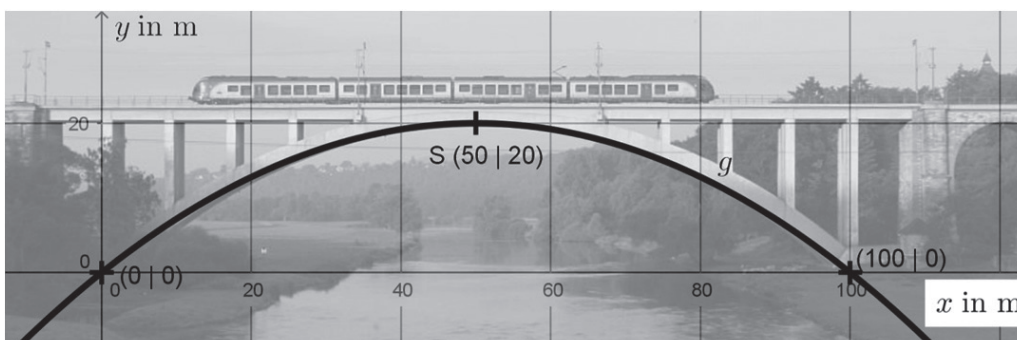


Abbildung 4: Fuldaatalbrücke, Brückenbogen durch eine Parabel angenähert, alle Angaben sind in Metern

- e) Begründe, dass die Funktionsgleichung $g(x) = -0,008 \cdot (x - 50)^2 + 20$ geeignet ist, um den Brückenbogen zu beschreiben.
- f) Justus legt den Ursprung des Koordinatensystems in den Scheitelpunkt der Parabel. Gib die veränderten Werte für e und f an. Wie verändert sich der Wert für d?

Aufgabe 2: Kaffee

Kaffee ist das Lieblingsgetränk in Deutschland. Im Durchschnitt trinkt jede Person etwa 165 Liter Kaffee im Jahr, davon 5 % aus Pappbechern.

- a) Berechne, wie viele Liter Kaffee jede Person durchschnittlich im Jahr aus Pappbechern trinkt.

Pro Jahr benutzt jede Person durchschnittlich ca. 34 Pappbecher. In Deutschland leben derzeit ca. 82 Millionen Menschen. Karin behauptet: „Jede Stunde werden in Deutschland ungefähr 320 000 Pappbecher in den Müll geworfen.“

- b) Hat Karin recht? Begründe.

Die obere Öffnung eines handelsüblichen Pappbechers hat einen Durchmesser von 7 cm.

- c) Der Boden einer Sporthalle mit 27 m Breite und 45 m Länge reicht nicht aus, um 320 000 Pappbecher so wie in Abbildung 1 nebeneinander aufzustellen. Bestätige dies durch eine Rechnung.



Abbildung 1: Pappbecher nebeneinander aufgestellt

Ein Pappbecher hat die Form eines Kegelstumpfes (Abbildung 2). Das Volumen des Kegelstumpfes lässt sich mit der folgenden Formel berechnen:

$$V = (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2) \cdot \frac{\pi \cdot h}{3}$$

- d) Der Pappbecher hat folgende Maße:
 $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 3,5$ cm und $h = 8,5$ cm.
 Bestätige mithilfe der angegebenen Formel, dass das Volumen eines solchen Bechers ca. 280 ml beträgt.

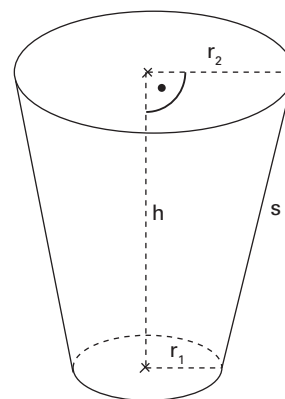


Abbildung 2: Kegelstumpf

- e) Karin berechnet das Volumen näherungsweise mit der Formel für den Zylinder. Als Radius nimmt sie den Mittelwert der beiden Radien des Kegelstumpfes, die Höhe bleibt gleich. Karin behauptet: „Das Ergebnis weicht um weniger als 1 % vom Ergebnis des Kegelstumpfvolumens ab.“ Hat sie recht? Begründe deine Antwort mit einer Rechnung.

Karin misst die Temperatur des Kaffees zu verschiedenen Zeiten. Sie stellt die Messwerte graphisch dar (Abbildung 3). Der abgebildete Graph stellt eine gute Näherung für den Abkühlungsprozess dar.

f) Entscheide, welche Funktionsgleichung zu dem Graphen gehört. Begründe deine Entscheidung.

- (i) $T_1(t) = 80 \cdot 0,94^t$
- (ii) $T_2(t) = 0,94^t + 80$
- (iii) $T_3(t) = 80 \cdot 1,8^t$

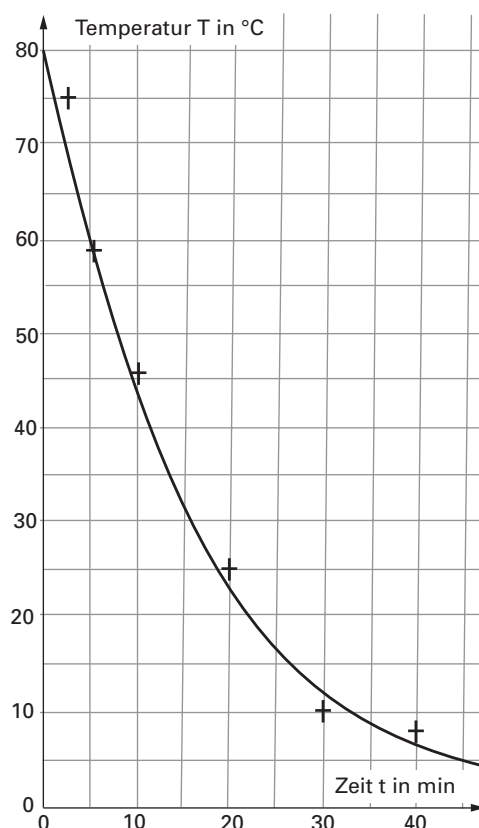


Abbildung 3: Temperatur des Kaffees zu verschiedenen Zeiten

Aufgabe 3: Sierpinski-Dreiecke

Die Sierpinski-Dreiecke entstehen folgendermaßen (Abbildung 1):

- Das Ausgangsdreieck ist ein gleichseitiges Dreieck (Figur 0).
- Die Mittelpunkte der Dreiecksseiten werden miteinander verbunden. Es entstehen vier kleine gleichseitige Dreiecke. Das mittlere Dreieck wird weiß gefärbt (Figur 1).
- Dieser Vorgang wird für alle schwarzen Dreiecke wiederholt (Figur 2, 3, 4, ...).

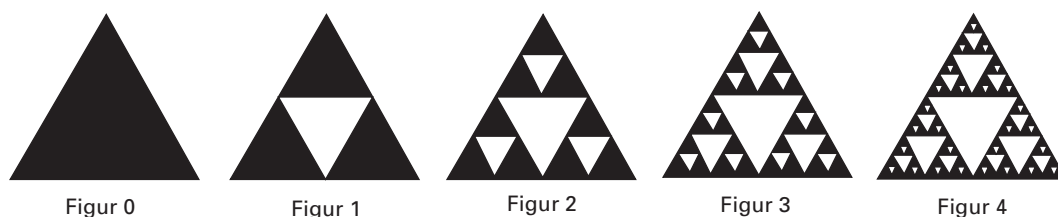


Abbildung 1: Sierpinski-Dreiecke, Figur 0 bis Figur 4

Jede Seitenlänge des Dreiecks in Figur 0 beträgt 10 cm.

- a) Bestätige durch eine Rechnung, dass der Flächeninhalt des Dreiecks in Figur 0 $A_0 = 43,3 \text{ cm}^2$ beträgt (Abbildung 2).
- b) Begründe den folgenden Zusammenhang anhand der Abbildung 1: Der Flächeninhalt aller schwarzen Dreiecke einer neuen Figur beträgt $\frac{3}{4}$ der Fläche der schwarzen Dreiecke der vorherigen Figur.

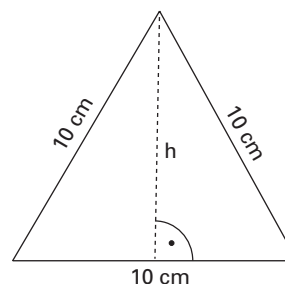


Abbildung 2: Dreieck zu Figur 0

- c) Der Flächeninhalt A_n aller schwarzen Dreiecke in Figur n kann mit folgendem Term berechnet werden:
 $43,3 \cdot 0,75^n$ (in cm^2)

Bei welcher Figur n beträgt der Flächeninhalt aller schwarzen Dreiecke zum ersten Mal weniger als 4 cm^2 ? Notiere dein Vorgehen.

Vera berechnet mit einer Tabellenkalkulation die Flächeninhalte der schwarzen Dreiecke.

	A	B	C	D	E
1	Figur	Anzahl der schwarzen Dreiecke [cm]	Fläche eines schwarzen Dreiecks [cm^2]	Fläche aller schwarzen Dreiecke [cm^2]	Anteil an der Gesamtfläche
2	0	1	43,300	43,300	1,000
3	1	3	10,825	32,475	0,750
4	2	9	2,706	24,356	0,563
5	3	27	0,677	18,267	
6	4	81	0,169	13,700	0,316
7	5	243	0,042	10,275	0,237
8	6	729	0,011	7,706	0,178

- d) Berechne den fehlenden Wert in Zelle E5. Runde auf drei Nachkommastellen.
- e) Betrachte die Zelle D3. Gib eine Formel an, mit der sich der Wert in dieser Zelle berechnen lässt.
- f) Die Summe der Flächeninhalte der schwarzen und der weißen Dreiecke ergibt in jeder Figur zusammen $43,3 \text{ cm}^2$.

Wie entwickeln sich die Flächeninhalte der schwarzen und der weißen Flächen, wenn man die Figuren immer weiter fortsetzt? Beschreibe.

Bearbeitungstipps

Prüfungsteil 1

1. a) Rechne Brüche in Dezimalbrüche um, wenn erforderlich. Vergegenwärtige dir vor dem Ordnen den Zahlenstrahl.
b) Forme in einen Dezimalbruch um. Der gibt dir den prozentualen Anteil an.
2. a) Hier handelt es sich um ein einstufiges Laplace-Experiment.
b) Hier handelt es sich um ein mehrstufiges Laplace-Experiment. Es gilt die Summenregel.
3. a) Verwende die Formel der Kugeloberfläche zur Berechnung.
b) Betrachte die Berechnungsformel genau und bewerte den Einfluss, den ein veränderter Radius auf das Rechenergebnis hat.
4. Verwende zur Lösung das Gleichsetz-, Einsetz- oder Additionsverfahren.
5. a) Betrachte das Diagramm genau und stelle fest, wo die Gerade die y-Achse schneidet.
b) Beachte, dass sich am Funktionswert nur b ändert!

Prüfungsteil 2

1. a) Verwende zur Berechnung die Formel für die Geschwindigkeit und berücksichtige, dass eine Stunde 60 Minuten hat.
b) Beachte, dass im Weg-Zeit-Diagramm der Graph die Geschwindigkeit darstellt. Die Steigung des Graphen ist das Maß für die Größe der Geschwindigkeit.
c) Bedenke, dass der Güterzug dem Personenzug entgegenkommt. Der Schnittpunkt beider Graphen kennzeichnet Ort und Zeit der Begegnung beider Züge.
d) Vom rechtwinkligen Dreieck sind nur der Winkel und eine Dreiecksseite bekannt. Verwende eine der trigonometrischen Funktionen.
e) Die Parabelfunktion liegt in Scheitelpunktform vor. In der kann man die Scheitelpunktwerte direkt ablesen.
f) Die Parabel bleibt erhalten und wird nur verschoben.
2. a) Basiswissen Prozentrechnen
b) siehe ausführliche Lösung.
c) Überprüfe, indem du die Anzahl der Becher feststellst, die jeweils in die Länge und Breite der Halle hineinpassen.
d) siehe ausführliche Lösung.
e) Überlege bei der Ermittlung der Abweichung, welcher Wert der Grundwert und der Prozentwert ist. Gefragt wird nach dem Prozentsatz!
f) Zur Überprüfung der Funktion wähle für t einmal den Wert 1 und dann einen anderen auf dem Graphen liegenden Wert. Setze ihn in die Funktionsgleichung ein und vergleiche den errechneten Wert mit dem entsprechenden Wert im Diagramm. Sind beide identisch, dann hast du die richtige Funktion ausgewählt.
3. a) Verwende zur Lösung die Flächenformel des Dreiecks. Um die Höhe zu errechnen, wende den Lehrsatz des Pythagoras an.
b) Wenn du die Abbildung 1 betrachtest, wirst du die Gemeinsamkeit aller abgebildeten Dreiecke feststellen. Leite daraus deine Begründung ab.
c) Löse durch Probieren, indem du für n verschiedene Werte einsetzt oder durch Anwenden der Logarithmen.
d) Beachte die Tabellenüberschriften und verwende die richtigen Werte für die Berechnung. Denke beim Runden an die Rundungsregel!
e) Verwende für die Formel Zellbezüge. Beachte dabei die Zeilen- und Spaltenbezeichnungen.
f) Berücksichtige bei der Beantwortung die Formel unter 3c) bzw. die Tabelle unter 3d).